

Vorschlag eines Rahmenwerkes zur exakten Definition von
Semantiken Funktionalharmonischer Symbolsysteme.

Markus Lepper
(*funsym000.tut*)

Fassung 23.11.2001

Inhaltsverzeichnis

1	Zu Inhalt und Form dieser Arbeit; methodologische Vorbemerkung	2
1.1	Zielsetzung	2
1.2	Zielgruppen und Methode	3
1.3	Aufbau dieses Textes	4
2	Historische Gestalt der „Funktionalharmonischen Analyse“.	4
2.1	Das Grundprinzip Funktionalharmonischer Abstraktion	5
2.2	Doppelfunktion der Funktionalsymbolik.	6
2.3	Die Funktionalsymbolik als Kalkül.	8
2.3.1	Bestimmung der Dreiklangsfunktion.	9
2.3.2	Bestimmung der Klanggestalt.	12
3	Die Sprache \mathcal{L}_{RIE}.	12
3.1	Codierung	12
3.2	Zur Notation.	14
3.3	Syntax der Tokendarstellung	15
3.4	Trägermengen für die Modellierung der Semantik	16
3.5	Zentrale Parsierungs- und Übersetzungsfunktionen	19
3.6	Berechnung Abstrakter Funktionsdreiklänge durch Anwendung von $\llbracket _ \rrbracket_{-,-}^{\mathcal{G}}$ auf Funktionsbuchstaben	21
3.6.1	Vorrangige Regeln	21
3.6.2	Nachrangige Regeln	22
3.7	Berechnung konkreter klingender Tonklassen durch Anwendung von $\llbracket _ \rrbracket_{-,-,-}^{\mathcal{K}}$ auf Funktionszahlen	22
3.7.1	Bestimmung des Baßtons	22
3.7.2	Ergänzung des Modifikators für „kein Modifikator angegeben“	22
3.7.3	Implizites Erklingen der Dreiklangstöne	23
3.7.4	Sonderregeln für Grundton, Terzton und Dominantseptime	23
3.7.5	Übersetzung aller Intervallziffern außer 1, 3 und 7	23
3.7.6	Übergang von Intervallziffern und -modifikatoren auf Tonklassen, Implizite Intervallgrößen	24
4	Idiosynkrasien \cup Anti-Orthogonalitäten = Klassifikationskriterien ?	26
5	Erweiterungen, Anpassungen und Einbettungen	31

Tabellenverzeichnis

1	Hilfsfunktionen und Schreibweisen.	14
2	Syntax unserer \mathcal{L}_{RIE}	15
3	Basis der Semantik.	16

4	Übersicht der Semantischen Funktionen und ihrer den Kontext repräsentierenden Parameter.	17
5	Semantik der Tonartbezeichnungen.	19
6	Semantik der reinen und der modifizierten Intervallziffern.	26

Zusammenfassung

Es wird eine kurze Einführung in historischen Ort und das Verfahren der „Funktionalharmonischen Analyse“ gegeben.

Dann wird eine Realisierung einer der vielen möglichen Varianten des dazu verwendeten Symbolsystems in Form der Spezifikation einer rechnerverständlichen Sprache vorgestellt

Die Semantik dieser Sprache wird spezifiziert.

Zuletzt wird diskutiert, wieweit die Idiosynkrasien und Antiorthogonalitäten der in der Geschichte der Musiktheorie entwickelten unterschiedlichen Symbolsysteme durch Vergleich mit einem solchem „exakt spezifiziertem“ System eindeutig erkannt, bezeichnet und evtl. interpretiert werden können.

1 Zu Inhalt und Form dieser Arbeit; methodologische Vorbemerkung

1.1 Zielsetzung

Dieser Text ist geplant als der erste einer Reihe kleinerer Arbeiten unter dem Titel „*LingArt*“, *linguae artium*, die Sprachen der Künste ([Lep97]).

Allerorten werden in unterschiedlichsten Gattungen „ästhetischer Produktion“ mittlerweile Digitalrechner eingesetzt :

Einerseits werden konventionelle, manuelle Herstellungstechniken mit Hilfe der Rechner einfacher, schneller und übersichtlicher erledigt. Die *Qualitäten* der konkret anzutreffenden Implementierungen dieser Übertragungen und der ihnen zugrunde liegenden Analysen bilden, wie in allen Bereichen der Computeranwendung, ein breites Spektrum : von dilettantischen, groben, ja barbarischen Kulturschandtatzen bis hin zu intelligenten, flexiblen und einfühlsamen Arbeitsumgebungen und Assistenten.

Andererseits gibt es durchaus einige genuine Neuerungen, rechnerartige Verfahren, ästhetische Produktionsvorgänge, die ohne die Digitaltechnik niemals entdeckt worden wären, – wenn diese auch durchaus weniger sind, als der Laie annehmen könnte : In der tekno-Musik z.B. sind tatsächlich nur die genialen Meisterwerke substantiell auf den Rechner angewiesen, schöpfen aus seinen immanenten Möglichkeiten, – die Massenproduktion bedarf nur deshalb des Rechners, weil dieser im Ggs. zum Menschen kein Ehrgefühl hat.

Was aber weithin fehlt ist, ganz unabhängig von der Verwendung des Computers als Maschine, die Anwendung der Erkenntnisse und Methoden der Computerwissenschaft auf ästhetische Fragestellungen.

Die „*computer science*“ oder „*Informatik*“ beschäftigt sich nämlich neben vielem anderem durchaus mit Themen, welche den Geisteswissenschaften näher stehen als der Technologie ! So ist Gegenstand der „Software-Technik“ u.a. zu untersuchen, auf welche Weise, mit welchen Mitteln und unter welchen Schwierigkeiten *Menschen* Modelle von komplexen Systemen entwickeln, kommunizieren, verfeinern und revidieren.

„Compilerbau“ und „Sprachdesign“ wiederum versuchen, Interaktion von Mensch und Maschine überhaupt erst zu ermöglichen, indem „Sprachen“, also zunächst syntaktische Regelsysteme, mit Hilfe mathematischer Methoden mit „Inhalt“ gefüllt werden. Die in diesem Zusammenhang notwendigen Untersuchungen und Unterscheidungen liefern nun nicht nur Erkenntnisse über die pur-mathematischen Eigenschaften von Syntax und Semantik, sondern können auch als Sonden in das menschliche Denken aufgefasst werden, soweit die Diskussion über mathematische Modelle auch eine Problematisierung der psycho-internen menschlichen Vorstellungen einschließt, welche, um mit den entstehenden Werkzeugen überhaupt umgehen zu können, mit jenen ja korreliert werden müssen.

Der Ansatz von *LingArt* kehrt genau diesen technologischen Produktionsprozeß um : Durch die Re-Synthese existierender, historisch aufgefundener Meta-Sprachen der ästhetischen Produktion soll versucht werden, diesen eine exakte Semantik zu geben, bzw. die seit eh implizit mitgedachte Semantik durch Synthese eines mathematischen Modelles einer Analyse zu unterziehen.

So wird in vorliegendem Text versucht, mit Hilfe etablierter Methoden exakter Sprachspezifikation ein Rahmenwerk zu schaffen, welches die detaillierten Analyse einzelner und den konkreten Vergleich verschiedener *Funktionalharmonischer Symbolsysteme* auf eine allgemein nachvollziehbare Grundlage stellen will.

1.2 Zielgruppen und Methode

Dies Vorhaben ist in zweierlei Hinsicht problematisch :

Zum einen wendet der Text sich an zwei (evtl. disjunkte) Lesergruppen, nämlich die musikalisch gebildeten InformatikerInnen und die computerwissenschaftlich oder -praktisch erfahrenen MusikerInnen. Den einen muß dies, den anderen jenes genauer erklärt werden, um verständlich zu bleiben¹.

Zum anderen besteht ein quantitatives Modellierungsproblem : Zwar wäre es durchaus möglich, eine größere Anzahl historischer Symbolsysteme unter Verwendung identischer semantischer Trägermengen zu modellieren, um diese dann in einem zweiten Schritt analytisch zu vergleichen.

Dem steht entgegen, daß die charakteristischen und damit psycho-analytisch wichtigen Unterschiede verschiedener Systeme zumeist in *Idiosynkrasien* bestehen, in leichten Abweichungen, Sondernotationen für Einzelfälle, Verbot bestimmter Kombinationen etc. Diese aber sind allesamt, wie im folgenden sichtbar, äußerst aufwendig zu modellieren, so daß dieser Weg bedeutete, erst einmal eine unübersichtliche Fülle von Sonderregeln nachbilden zu müssen, bevor man überhaupt zum Vergleichen käme, – einfache Grundprinzipien würden nur als Ergebnis des mühsamen Re-Konstruierens der Gemeinsamkeiten erscheinen können.

Wir gehen deshalb den umgekehrten Weg, indem wir ein „eigenes Notationssystem“ beschreiben, um im Verlaufe dieser Beschreibung den Informatikern die Grundlagen der funktionalharmonischen Analyse und den Musikern die Techniken von Syntax- und Semantikdefinition nahezubringen.

Diese „eigene Notation“ will *keinesfalls als solche* ernstgenommen² werden, – Systeme gibt's genügend, und wenigens wäre unfruchtbarer als ein neues System verbreiten zu wollen, – ist vielmehr ein paradigmatisch zu verstehendes „Spielsystem“.

Dieses Spielsystem *wäre* aber durchaus mit gutem Erfolg verwendbar, führt also die Nicht-MusiktheoretikerInnen unter den Lesern keinesfalls in die Irre, sondern arbeitet im Gegenteil die erprobten Grundprinzipien klarer heraus, weil es substantiell nichts anderes ist als ein Konzentrat oder Exzerpt einer wohlbekanntem und oft verwendeten bestimmten *Familie* von Notationen, welche gekennzeichnet ist durch die von WILHELM MALER eingeführte Groß/Kleinschreibung der Symbolbuchstaben zum Zwecke ihrer Geschlechtsangabe [Mal31].

Diese Systeme wurden teilweise dahingehend vereinfacht, daß Anti-Orthogonalitäten begradigt wurden, Sonderregeln entfernt und in ihnen bereits angelegte Möglichkeiten von Symbolkombinationen auf ihre „transitive Hülle“ ausgedehnt wurden.

Einige Anti-Orthogonalitäten jedoch wurden bewußt beibehalten. Die mathematische Modellierung ist ja nur Mittel, – Ziel der Arbeit soll es ja gerade sein, durch Betrachtung und Vergleich der Modelle die charakteristischen Besonderheiten verschiedener Systeme (1) zunächst aufzuweisen und dann – wichtiger noch – (2) deren kulturelle oder psychointerpretative Bedeutung benennen zu können.

Diese Besonderheiten aber sind zumeist derartige Anti-Orthogonalitäten.

¹Stilistisch kann dieses Papier nichts anderes als ein „Zwitter“ sein, da es für Musikkomponisten, -theoretikern und -wissenschaftlern (alphabetische Reihenfolge!) genau so lesbar sein soll wie für Informatiker, Linguisten etc. Aus den Blickwinkeln dieser unterschiedlichsten Disziplinen erwartet der Autor die verschiedenartigsten Kritiken und Einwände bezgl. der Form der Darstellung, welche er dankbar entgegennehmen wird, um sie bei seiner weiteren Arbeit zu berücksichtigen.

²Wäre die Rechtschreibreform gut gemacht worden, müsste sie jetzt nicht gutgemacht werden.

1.3 Aufbau dieses Textes

Deshalb wird – nach einer kurzen Einführung in die Methode der Funktionalharmonischen Analyse im folgenden Abschnitt – im dritten Abschnitt unser „Spielmodell“ zunächst einmal „autark“ aufgebaut.

Darin verweisen *farbige Marken* auf den vierten Abschnitt, in welchem die *einzelnen Anti-Orthogonalitäten unseres und anderer Systeme einzeln erwähnt* werden, wobei der Rückbezug auf die konkreten mathematischen Formeln – so hoffen wir – bewirkt, daß deren Diskussion auf begrifflich klarerer Grundlage erfolgen kann.

Ein letzter Abschnitt beschäftigt sich mit möglichen Erweiterungen und Anwendungen unseres Verfahrens.

Der Verfasser hat – länger als vorausgesehen – mit der Großform der Darstellung, aber auch mit der konkreten Modellierung ringen müssen; dieses „konstruktive“ Vorgehen schien letztlich das einzig praktikable.

Die Vorversuche zur Modellierung jedoch waren in ihrem jeweilig spezifischen Scheitern fast instruktiver als das nun vorliegende Resultat, aber in ihrer dynamischen Fragmentarität naturgemäß noch schwerer mitteilbar.

2 Historische Gestalt der „Funktionalharmonischen Analyse“.

Die „Funktionalharmonische Theorie“ ist ein Verfahren zur sog. „Analyse“ der harmonischen Strukturen von Musik, welches sowohl auf die Hervorbringnisse vom Barock bis zur Spätromantik anwendbar ist, als auch auf die Produkte zeitgenössischer tonaler Unterhaltungsmusik. Begründet wurde die historische Entwicklung der verschiedenen Systeme der Funktionalharmonischen Analyse mit dem Wekren HUGO RIEMANNs, [Rie18], [Rie93].

Aber auch um mögliche *Wahrnehmungseffekte* eines tonal geprägten Hörers zu benennen, kann es u.U. zweckmäßig sein, dieses Analyseverfahren auf prae- oder post-funktionale Musik anzuwenden, also auf Werke der Renaissance, der frühen Atonalität, ja sogar des Serialismus.

Immer allerdings ist die Entscheidung, die Methode der Funktionalharmonischen Analyse *überhaupt anzuwenden*, als solche schon eine Aussage über vermutete Wirkungszusammenhänge, also bereits Interpretation.

„Analyse“ bedeutet dabei, daß versucht wird, die beim Hören der Musik (vermutlicherweise) ablaufenden vor-symbolischen psycho-internen Erlebniszustände durch eine abstrahierende Beschreibung in einem scheinbar autarken Kalkülsystem zu modellieren.

In dieser Formulierung scheint schon die immanente Widersprüchlichkeit dieses Verfahrens auf, welche sich in doppelter Hinsicht äußert :

Zum einen sind die „unterstellten“ Mechanismen der psychologischen Wirklichkeit nur bedingt nachweisbar, – allemal jedoch sind sie historisch vermittelt, erfahrungsabhängig und in ihren Auswirkungen sehr persönlich, da letztlich „seelisch“ – also im Gegensatz zu einem Kalkülsystem alles andere als „autark“.

Zum anderen sind die ausgehend von den Arbeiten RIEMANNs entwickelten unterschiedlichsten Systeme ihrerseits *historisch* determiniert; schon in der Wahl der Grundsymbole und Verknüpfungsregeln spiegelt sich das Vorverständnis des Autors des Systems von der Struktur des Darzustellenden. Übersicht und Vergleich vieler wichtiger Systeme findet sich in [Imi70].

Meta-theoretisch interessant ist, daß unterschiedliche Auffassungen sowohl sich äußern können im Kampf zweier konkurrierender Autoren und ihrer Systeme, aber auch *innerhalb* eines Systems als Varianten nebeneinander bestehen.

Die gleichsam „qualitative“, dogmatische Hypostatisierung eines Grundprinzips steht gegenüber einer „quantitativen“ Auffassung, die je nach Wahrnehmungskontext mal die eine, mal die andere „Schreibweise“ für angemessen hält, – was im ersten Fall als Strukturindiz für die Existenz unterschiedlicher, ja dualer erkenntnistheoretischer Grundmodelle von musikalischer Wirkungsweise steht, ist im zweiten Fall zusätzliches Ausdrucksmittel.

Konkret ist es z.B. umstritten, ob für den „Neapolitanischen Sextakkord“ ein eigenes Zeichen (S^N) verwendet werden soll, oder ob die Standardableitung ausreicht (z.B. s^6 -, sG_3 , o.ä.).

KELLER [Kel59], MALER [Mal31] und SCHÖNBERG [Sch57] z.B. sehen je zwei Symbole für diesen Klang vor, je nachdem, ob die zu bezeichnende gegebene Klangstruktur „eher zufällig“ dem Neapolitaner entspricht, oder – z.B. im typischen Kadenz*zusammenhang* – eindeutig die Erlebnisklasse „Neapolitaner“ bedeutet.

Die Wahl des Zeichens wird also „rückwärts“ determiniert durch das Superzeichen, in welchem es auftritt – dies scheint (rein methodologisch betrachtet) nicht sehr sauber, aber (was größtmögliche Nähe des Darstellenden zum Dargestellten, also der Schreibweise zur Wirkung betrifft) durchaus angemessen.

2.1 Das Grundprinzip Funktionalharmonischer Abstraktion

Die Funktionalharmonische Theorie hat ihren Namen von ihrem Grundprinzip, daß nämlich die Tonhöhen der musikalischen Ereignisse nicht für sich betrachtet werden, sondern – unter Abstraktion ihrer konkreten Frequenz und Notation – als *Funktionsträger* in einem *tonalen Kontext*.

Stilistische, wahrnehmungspsychologische, kompositionstechnische etc. Analyse findet dann nach diesem Abstraktionsschritt statt auf den Strukturen und Rhythmen dieser Funktionen, welche – so setzt diese Methode voraus – prinzipiell auch in andere Tonarten transponierbar wären, ohne daß sich die „funktionale Bedeutung“, was immer das sei, änderte.

Die Funktionalharmonische Abstraktion vollzieht sich dabei (grob gesehen) in drei Schritten :

1. Zunächst werden alle auftretenden Tonhöhen abgebildet auf ihre *Tonklassen*, – es wird also von der *Oktavelage* der Töne abstrahiert.
2. Dann wird die einzelne Tonklasse als Bestandteil eines (oktavabstrahierten) Klanges begriffen und erfüllt innerhalb dieses Klanges eine bestimmte „Funktion“ (als Grundton, Terz(-ton), Septime, Quartvorhalt etc.)
3. Der Klang (oder „Akkord“) wird wiederum als Funktionsträger in einem tonalen Kontext aufgefaßt; unabhängig von seiner konkreten Gestalt ist der Klang Repräsentant (Realisierung) einer tonalen „Funktion“ (Tonika, Subdominante etc.)

Die Organisation der Töne im Klang folgt dabei in erster Linie dem Intervall der *Terz*, der Bezug der Klänge auf die Grundtonart folgt dem Intervall der *Quinte*.

Hier begegnet uns bereits eine erste, ernste Irregularität :

Die im gesamten Abstraktionsvorgang zwangsläufig an erster Stelle stehende Abstraktion von der Oktavelage wird nämlich nur „partiell“ oder „vorläufig“ vollzogen.

Alle Systeme stimmen nämlich darin überein, daß der *physikalisch tiefste* Ton eines konkreten Klanges (= „Baßton“) ausgezeichnete Bedeutung hat : Sobald dieser nicht mehr der Tonklasse des Grundtones des Akkordes angehört, spricht man von *Akkordumkehrung* und bringt das auch in der funktionalharmonischen Symbolik zum Ausdruck (Kurzsprechweise : Baßton \neq Grundton).

Diese Inkonsequenz ist Indiz für die weitergehende Einschränkung, daß die a priori Abstraktion von Tonhöhen nach Tonklassen doch ein recht *gewaltsamer* Eingriff in die Substanz des Erlebens darstellt. Dieser scheint bei der Anwendung des Verfahrens auf die barocke, klassische und früh-romantische Tonalität, für welche es ja entwickelt wurde, wenig zu stören, d.h. das Verfahren liefert oft brauchbare Ergebnisse.

Je weiter aber der *Klang* sich emanzipiert, also von der Spätromantik bis zur Moderne, um so wichtiger ist eine vorherige Betrachtung von Oktavbelegung und konkretem Klangaufbau, ja evtl. sogar der Instrumentation, um festzustellen, welche Relevanz irgendwelchen Ergebnissen nach Oktavabstraktion – abgesehen von ihrer „rechnerischen Richtigkeit“ – überhaupt zukommen kann.

So ist z.B. der berühmte Dominantakkord in der Coda des Adagios von MAHLER X (cis-gis-h-d-f-a-c-es-g) eben *kein* Neun-Ton-Cluster, sondern eine sorgsam im Tonraum disponierte Klangsäule.

In der Tat wurden ja – in Konkurrenz oder zur Ergänzung des funktionalharmonischen Verfahrens – durchaus Theorien entwickelt, welche die Abstraktion modulo Oktave *nicht* erlauben (Sonanztheorien, MESSIAENSche Modi).

Diese Inkonsequenz bei der Oktavabstraktion ist darüber hinaus ein konkretes Strukturindiz für die allgemeinere Tatsache, daß jede *Analysemethode* stets nur einen Teilaspekt der betrachteten Gesamtwirkung darstellen kann, ihre Ergebnisse allemal in größere Bedeutungszusammenhänge eingeordnet werden müssen, um ihre tatsächliche Relevanz zu bestimmen.

2.2 Doppelfunktion der Funktionalsymbolik.

Eine „Funktionalharmonische Interpretation“ eines Musikstückes ist also eine Zuordnung seiner konkreten Klangfolge (also der „physikalischen“ oder „erklingenden“ oder „notierten“ Substanz, je nach erkenntnistheoretischem Grundmodell !) zu einer Folge von Termen des Funktionalharmonischen Kalküls.

Konkret : Der Analysierende schreibt unter (seltener über) die Notensysteme des zu analysierenden „corpus“ einen Folge von Termen des gewählten Symbolsystems.

Der Aussagegehalt einer solchen Folge von Termen besteht dabei in ihrer Doppelfunktion : Die „objektiv-mathematische“ Semantik besteht darin, daß jeder Term (ausgewertet bezüglich einer gegebenen *Grund-Tonart*) je eine Menge von *Tonklassen* (und eine weitere Tonklasse für den „Grundton“ des Klanges) generiert.

Die so generierten Folgen von Tonklassen-Mengen müssen quasi „objektiv“ mit dem zu analysierenden Notentext übereinstimmen, als jede der in jenen auftretenden Tonklassen durch die Tonhöhe mindestens eines Ereignisses im Notentext (von der horizontalen Position des Termes bis zu der des folgenden gelesen) realisiert werden muß³.

Die „rezeptionspsychologische“ Semantik der Funktionalharmonischen Interpretation hingegen besteht in der Behauptung ihres Autors, daß die Folge der Terme (hinausgehend

³Diese Aussage wird relativiert werden müssen, sobald man das *Tongedächtnis* in die Analyse einbezieht, siehe unten, 5.

über jene rein mathematische Korrektheit) die psycho-internen „Verständnis“-Vorgänge im Hörer annähernd korrekt beschreibt.

Zwei Interpretationen derselben Klangfolge, die auf der *Kalkülebene identische* Semantiken tragen (also dieselben Mengen von Tonklassen bezeichnen) können im Sinne dieser psychologischen Hintergrundsemantik also durchaus *unterschiedliche* Bedeutung haben. Z.B. ist die Interpretation eines A-Dur-Klanges in einem C-Dur Kontext als TP, als DDD oder als (D)[Sp] = SpD möglich; alle drei Schreibweisen tragen (im Kalkülsinne) *identische Semantik*⁴, weil sie dieselben Mengen von Tonklassen hervorbringen.

Hingegen ist in diesen drei Schreibweisen die jeweils behauptete innerpsychische Dynamik bei der Rezeption der Klangergebnisse jeweils eine völlig andere. Bereits die bloße Verwendung des Buchstabens D und damit des Begriffes der „Dominante“ bedeutet ja keinesfalls ein physikalisches Phänomen, sondern die *Behauptung* der Existenz einer rezeptionspsychologischen Grundstruktur⁵, welche trotz überzeitlicher Selbstidentität sich historisch jeweils in unterschiedlichsten, über die Jahrhunderte zunehmend komplexeren *Ausprägungen* darstellt.

Die *Idee* der Dominante ist also zugleich Konzentrat einer komplexen Entwicklung, als auch Abstraktion einer physiologischen („fleischlichen“) Grunderfahrung von Spannung und Erfüllung.

Die zunehmende Komplizierung an der Oberfläche, um dieses so grundlegend einfache D T auszudrücken, wird bewirkt durch die *Abnutzungserscheinungen* der Akkordformen durch Gewöhnung.

So kommt es, daß BEETHOVEN (IX. Sinf., 1. Satz, Rückführung zur Reprise), WAGNER (Siegfried III, vor Brünnhilds Erwachen) und Mahler (II. Sinf, 1. Satz, ebenfalls Rf zur Rp) an den zentralen Stellen ihrer gewaltigen Architekturen zu Konstruktionen wie

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 15 & & \\ & & & & 13- & & \\ & & & & 11 & & \\ & & & & 9- & & t \\ & & 9 & & & & s \\ \text{d-moll: } D T_3 t_3, & \text{C-Dur: } (D^7)D_p T, & \text{c-moll: } D^7 & t^3/ & (= \text{c-moll: } D t^3/) \end{array}$$

greifen mußten, um das „primitive Urerlebnis“ D T auszudrücken.

Ja, schon bei J.S.BACH und in den BEETHOVENSCHEN Klavierbagatellen wird man finden, wie genau die D T-Schritte Ton für Ton mit kompositorischen Mitteln *je neu konstruiert* werden, keinesfalls als gegeben schlichtweg benutzt.

Zum historischen und psychologischen Phänomen der „Dominate“ gehört zwingend, daß der sie repräsentierende Klang die *Dur*-Terz aufweist, als sog. „Leitton“.

In diesem Sinne ist z.B. die Verwendung des Zeichens d (und die konkret wahrnehmbare Wirkung eines damit bezeichnbaren *moll*-Akkordes der fünften Stufe) eine zutiefst dialektische : Die *Stufe* der Dominate wird betreten, gleichzeitig die *Wirkung* der Dominate verweigert; – das eintretende rückungsähnliche Gefühl der Ferne, des Verlustes und der Negierung von Gerichtetheit ist durch diese Dialektik konkret zu begründen; - die Bezeichnung als „Dominante“, welche der Buchstabe „Dee“ ja impliziert, ist nur noch als Negation der Negation sinnvoll.

⁴Dies gilt jedenfalls in unserer Modellierung, in welcher eine „neutrale“ Tonhöhenalgebra als Träger gewählt wird, und nicht zwischen vierfachem Quintschritt und einfachem Großterzschritt unterschieden wird, wie bei VON OETTINGEN [vO66].

⁵Z.B. formulierbar als „Der Zustand der Dominante ist der einer gespannten Erwartung, welche auf *genau einen*, wohldefinierten spannungslösenden Zielzustand hin orientiert ist.“ Dieser Zielzustand heißt 'Tonika', symbolisch in Dur 'T' und in moll 't'.

Andererseits wird man in der sog. Neuen Musik Strukturen nachweisen können, in denen die nämliche Wirkung, das psychische Verhalten, welches der Rezeption des Dominant-Verhältnisses entspricht, mit ganz anderen als tonalen Mitteln, mit Rhythmus, Klangfarbe, Satzstruktur etc. hervorgebracht wird.

2.3 Die Funktionalsymbolik als Kalkül.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir jedoch zunächst ausschließlich jenen „objektiven“ Aspekt der Funktionalsymbolik, betrachten sie also als ein *Kalkül*.

In diesem ist jede beliebige konkrete Klanggestalt (jede auch zufällige Kombination von Tonklassen) unter Abstraktion von der Oktavlage als Hervorbringung eines *Termes* darstellbar.

Bezeichnen wir den von einem Term hervorgebrachten Klang (Tonklassenmenge unter Auszeichnung eines „Grundtones“) als die *Semantik* (im mathematischen Sinne) dieses Terms.

Unsere „Spielsystem“ ist größtenteils als (kontextfreies) *Postfix-Kalkül* angelegt. Die dementsprechende Darstellungsform ist eine „induktive“ und kann wie folgt beschrieben werden :

Hat ein beliebiger(!) Term Ω die Semantik S , und die Syntax erlaubt das „Anhängen“ eines Zeichens α an diesen Term, dann ergibt sich die Semantik von $\Omega\alpha$ *vollständig* als Funktion von S . Diese Funktion ist *ausschliesslich* durch den Wert von α bestimmt.

Interessanterweise war ROBERT SCHUMANN der erste, der bereits 1836 ein ähnliches Verfahren anregte (*cf.* seine Besprechung von KALKBRENNER op. 127, in [Sch14], Bd I, S. 259). Ihm selbst bestand verständlicherweise weder das Interesse noch die Möglselbst, diesen Vorschlag systematisch auszuarbeiten, – aber auch später wurde m.W. dieser wertvolle Ansatz (eines „Postfix“-Kalküls) nicht weiter verfolgt.

Die Berechnung der Semantik eines jeden Terms geschieht zweistufig, entsprechend der Zweistufigkeit der Syntax, welche wiederum die beiden o.e. (2.1) kaskadierten Arten der „Funktionshaftigkeit“ widerspiegeln :

1. *Funktionsbuchstaben* : Aus der (auf Zeilenhöhe stehenden) Folge von „Funktionsbuchstaben“ wird eine Dreiklangsfunktion bestimmt. Dies ist ein 2-tupel aus Grundton (des Funktionsakkordes) und Tongeschlecht.
2. *Intervallzahlen* : Aus der (hoch- und tiefgestellten) Ziffernmatrix wird die konkrete *Klanggestalt* (modulo Oktave) der Funktion bestimmt.

Dieses Modell ist ein *historisch* determiniertes, d.h. gewisse Unregelmäßigkeiten haben durchaus ihre Berechtigung, weil der Gegenstand des Dargestellten halt nicht abstrakt-mathematische Mengenkonstruktionen sind, sondern Entitäten einer historischen Betrachtungsweise.

Es gibt einerseits Anti-Orthogonalitäten :

- Die Größenbestimmungen von Terz- und Septimtönen z.B. bedürfen in unserer Modellierung \mathcal{L}_{RIE} relativ aufwendiger Maßnahmen wie zusätzlicher Kontextbestandteile.
- Ein einziger der Funktionsbuchstaben P,p,G,g kann in einer Folge von Funktionsbuchstaben einen oder gleich zwei Ableitungsschritte ausdrücken.

Andererseits sind relativ einfach in \mathcal{L}_{RIE} zu schreibende Terme im praktischen Gebrauch von Musiktheorie und -wissenschaft durchaus unüblich, und das aus guten Gründen.

Diese kleine Untersuchung hat u.a. die Funktion, eine Grundlage für die Systematisierung dieser Irregularitäten anzubieten, welche durch den Vergleich zwischen den theoretisch aus unserer exakten Sprachdefinition resultierenden Formulierungsmöglichkeiten mit der Praxis der musikwissenschaftlichen Literatur zu leisten wäre.

2.3.1 Bestimmung der Dreiklangsfunktion.

Jeder Ausdruck wird ausgewertet bezogen auf einen *Bezugston*, welcher zu Beginn gleich dem Grundton der *Grundtonart* ist, aber durch „lokale scopes“ (= „erweiterte Funktionen“ / „tonale Abschweifungen“ / „auskomponierte Funktionen“ / „Modulationen“, etc.) auch von diesem verschieden sein kann.

Ausgehend vom angegebenen (momentan gültigen) Bezugston wird nun durch die Folge der Funktionsbuchstaben zunächst ein *AbstrakterFunktionsDreiklang* bestimmt.

Mit der Ausgangstonart ist ein(1) bestimmter Dreiklang unmittelbar gegeben, der Tonika-Dreiklang⁶. Jeder der Funktionsbuchstaben eines Klangtermes bedeutet nun von links nach rechts einen Übergang von einem gegebenen Dreiklang zu einem anderen. I.a. gilt, daß ein Großbuchstabe das Tongeschlecht „Dur“ bedeutet, ein Kleinbuchstabe das „moll“, – wie o.e. gehört unser System zur Familie der MALERSchen.

Die grundlegenden Schritte sind :

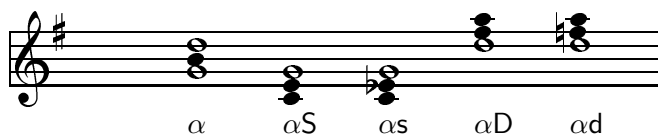
1. Quintschritt,
2. Terz-Quart-Wechsel, und
3. Geschlechtswechsel.

Diese bedeuten ...

1. Quintschritt :

Bei einem Quintschritt haben gegebener Klang und Zielklang *einen* gemeinsamen Ton: vom gegebenen Klang wird auf den abgeleiteten Dreiklang übergegangen, indem entweder der *Quintton* des einen zum Grundton des nächsten Klanges wird, oder der Grundton des gegebenen zum Quintton des nächsten. Der Grundton des abgeleiteten Klanges steht somit eine Quinte höher oder tiefer als der des Ausgangsklanges; die Symbole sind entsprechend D oder S für „Dominante“ oder „Sub-Dominante“ = „untere Dominante“.

Bezeichnen ein beliebiger Funktionalharmonischer Term α den G-Dur-Dreiklang, so ergeben sich durch Nachstellen von D, d, S oder s also folgende Klänge :



Die Terz des Ausgangsklanges wird bei solchen Quintschritten gar nicht zur Bestimmung des Abstrakten Funktionsdreiklanges herangezogen ! Würde unser Term α

⁶Jeder „AbstrakteFunktionsDreiklang“ wird in unserer Modellierung einfach durch ein 2-Tupel „Grundton \times Geschlecht“ beschrieben.

den g-moll-Dreiklang bezeichnen, so wären die Klänge aller vier Ableitungsterme in unserem Beispiel völlig identisch !

Erst recht keine Rolle spielt bei dieser Ableitung die „nominelle“ Bezugstonart!

Obiges Beispiel zeigt, daß das Tongeschlecht des denotierten Klanges unabhängig von der Bezugstonart allein durch die Schreibweise des Funktionsbuchstabens vollständig bestimmt wird : bei großem Buchstaben wird ein Dur-, bei kleinem ein moll-Dreiklang erzeugt, – dies gilt sogar für die Tonika T oder t, dem eigentlichen Zentralklang einer jeden Tonart, von welchem man annehmen könnte, daß sein Geschlecht fest an das Geschlecht der Bezugstonart gebunden wäre⁷.

Dies zeigt deutlich, daß die Funktionalharmonische Schreibweise ein Mittel zur *Interpretation*, ja „Exegese“ ist : Die reine *Wahl* einer Bezugstonart ist schon eine Aussage über einen größeren (oder mittelgroßen) Wahrnehmungszusammenhang, welcher durch ein kurzzeitiges Auftreten einer „falschen“ Tonika an Aussagekraft eher gewinnt⁸.

2. Terz-Quart-Wechsel :

Hierbei haben gegebener Klang und Zielklang *zwei* gemeinsame Töne.

Stellt man sich die Tonklassenmenge als Griff der rechten Hand auf dem Klavier in enger Quintlage vor (Normalstellung), so geht entweder der Quintton einen Schritt nach oben (die obere Terz wird zur Quarte und die unteren Dreiklangstöne sind gemeinsame) oder es geht der Grundton des Dreiklanges einen Schritt nach unten (die untere Terz wird zur Quarte und die oberen Dreiklangstöne sind gemeinsam).

Den Übergang, bei dem der sich ändernde Ton den Schritt einer *großen* Sekunde macht, heißt Übergang in die „Parallele“, der mit der kleinen Sekunde in den „Gegenklang“ :

Die zweite Zeile zeigt dieselben Ableitungen wie die erste, aber wieder in „Terzaufbau“ gebracht. Man erkennt, daß das entweder das im Ausgangsdreiklang oben liegende Terz-Intervall zum unteren wird, oder das untere zum oberen. Da aber ein

⁷Das Tongeschlecht der Grundtonart ist erst wieder für die Bestimmung der Intervallgröße bei der Beschreibung der *Klanggestalt* (im zweiten Schritt der Auswertung) relevant.

⁸Darüber hinaus zeigt unser Beispiel, daß die Bezugstonart als zur Interpretation gehörig ihrerseits von der notierten Vorzeichnung unabhängig ist, welche ja zum Corpus des zu-Interpretierenden gehört.

Andererseits beeinflusst die Vorzeichnung jedoch durchaus die (im nächsten Abschnitt behandelte) Notation der Klanggestalt, da in der klassischen Funktionalharmonischen Symbolik *Vorzeichen* hinter oder vor die Ziffern der klingenden Intervalle gesetzt werden, und dabei die Vorzeichnung des Notentextes als default-Kontext angenommen wird.

(reiner) Dreiklang immer aus zwei Terzen unterschiedlicher Größen besteht, und deren Anordnung das Akkordgeschlecht bestimmt, verbinden folglich unsere Terz-Quart-Wechsel immer einen Dur- mit einem moll-Dreiklang.

Bezeichne der Term Ω einen beliebigen Dur-Dreiklang (hier : G-Dur), und ω einen in moll, so zeigt unser Notenbeispiel die vier möglichen Ableitungen $\omega^P, \omega^G, \Omega^p$ und $\Omega^g, .$

Wird ein solcher Übergang *zweimal* direkt hintereinander ausgeführt, so ist man wieder beim Ausgangsklang, – in unserem Beispiel gilt $\omega^G = \Omega$ und $\Omega^g = \omega$, also $\omega^Gg = \omega$.

Deshalb unterscheiden wir auch in der Nomenklatur diese „... Wechsel“ von den o.e. (Quint-) „... Schritten“.

Bei einem Parallelübergang geht der $\left\{ \begin{array}{c} \text{Quint-} \\ \text{Grund-} \end{array} \right\}$ ton des $\left\{ \begin{array}{c} \text{Dur-} \\ \text{moll-} \end{array} \right\}$ Dreiklanges eine *große* Sekunde $\left\{ \begin{array}{c} \text{auf-} \\ \text{ab-} \end{array} \right\}$ wärts in den $\left\{ \begin{array}{c} \text{Grund-} \\ \text{Quint-} \end{array} \right\}$ ton des $\left\{ \begin{array}{c} \text{moll-} \\ \text{Dur-} \end{array} \right\}$ Dreiklanges. Der Grundton des abgeleiteten Klanges liegt eine *kleine Terz* $\left\{ \begin{array}{c} \text{unter} \\ \text{über} \end{array} \right\}$ dem Ausgangsgrundton.

Bei einem Gegenklangübergang geht der $\left\{ \begin{array}{c} \text{Grund-} \\ \text{Quint-} \end{array} \right\}$ ton des $\left\{ \begin{array}{c} \text{Dur-} \\ \text{moll-} \end{array} \right\}$ Dreiklanges eine *kleine* Sekunde $\left\{ \begin{array}{c} \text{ab-} \\ \text{auf-} \end{array} \right\}$ wärts in den $\left\{ \begin{array}{c} \text{Quint-} \\ \text{Grund-} \end{array} \right\}$ ton des $\left\{ \begin{array}{c} \text{moll-} \\ \text{Dur-} \end{array} \right\}$ Dreiklanges. Der Grundton des abgeleiteten Klanges liegt eine *große Terz* $\left\{ \begin{array}{c} \text{über} \\ \text{unter} \end{array} \right\}$ dem Ausgangsgrundton.

3. Geschlechtswechsel :

Ausgangsdreiklang und Zielklang haben hierbei ebenfalls *zwei* Töne gemeinsam, diesmal Grundton und Quintton. Der Terzton wird durch den des entgegengesetzten Geschlechtes ersetzt: Dur wird zu moll und umgekehrt.

Da ein Quintschritt eh das Tongeschlecht des Zielklanges völlig frei festsetzen kann, ist ein Dur-moll-Wechsel nur nach einem Parallel- oder Gegenklangübergang sinnvoll. Die historisch begründete Schreibweise bezeichnet die o.e. einfachen Terz-Quart-Wechsel durch einen Buchstaben, der auf einen solchen anderer Größe folgt, da bei dieser Art von Übergang ja ein Geschlechtswechsel impliziert wird : Tp oder Dg .

Folgt nun ein großes (kleines) P oder G auf einen Groß-(Klein-)buchstaben, so sind mit *einem*(1) Buchstaben *zwei*(2) Ableitungsschritte gemeint: erst der Terz-Quart-Wechsel und danach der Geschlechtswechsel.

Dies sind die sog. „entlehnten“ Nebenfunktionen, wie TP oder sg , welche ab dem „mittleren“ BEETHOVEN und dann in der Romantik, besonders bei SCHUBERT und EISSLER, wenn auch in höchst unterschiedlicher Weise, zum zentralen Mittel der Gestaltung, ja der Architektur werden.

Ein solcher Geschlechtswechsel („Vermollung“ oder „Verdurung“) ist zunächst nur ein *lokales* Phänomen, eine *klangliche* Umfärbung. Erst wenn auf einen solchen Schritt weitere Ableitungsschritte folgen, besonders Parallel- und Gegenklangübergänge, gewinnt er strukturelle Bedeutung, da die derart generierbaren Klänge in ganz andere tonartige Bereiche führen können, zB. ist $(C\text{-Dur:}TPP)$, – mit expliziter Verdurung geschrieben $(C\text{-Dur:}Tp\uparrow p\uparrow)$ –, gleichbedeutend mit $Fis\text{-Dur}$, – weiter wegger geht es kaum !

2.3.2 Bestimmung der Klanggestalt.

Eine so bestimmte harmonische Funktion kann nun in einem zweiten Schritt durch konkrete Akkorde allerverschiedenster Gestalt ausgedrückt („realisiert“) werden.

Die Akkordgestalt wird durch eine Ziffernmatrix über dem Funktionsbuchstaben angegeben. Jede Ziffer bezeichnet das Intervall eines klingenden Tones relativ zum Grundton des Klanges. Grund-, Terz- und Quintton wird allgemein als erklingend vorausgesetzt, ihr Nichterklingen bedarf der expliziten Bezeichnung.

Der einfache Fall (in unserem Modell realisiert durch die Nonterminalkonstruktion „*KlangGestalt*“) besteht in *einer* Spalte von Ziffern übereinander.

Wenn mehrere solcher Spalten der selben Funktionsbuchstabenfolge zugeordnet sind, ist damit ein *zeitlicher Verlauf* von Akkordtönen gemeint, z.B. Vorhalte, Verschärfungen, Vornwegnahmen etc. Dieses Verfahren ist aus dem der Generalbaß-Bezifferung abgeleitet und bedeutet somit einen immanenten Bruch, zumindest einen auffälligen *Paradigmenwechsel*, dessen Konsequenzen auf der Grundlage unseres Modellentwurfes exakt zu diskutieren wären.

3 Die Sprache \mathcal{L}_{RIE} .

3.1 Codierung

Wir definieren im folgenden Syntax und Semantik einer Sprache „ \mathcal{L}_{RIE} “, welche sich an die gebräuchlichen Techniken der Funktionalen Symbolik anlehnt.

Zunächst stellt sich das Problem, eine *graphische* Notation in einer Form zu *codieren*, welche der formalen Interpretation und damit einer rechnergestützten Ausführung zugänglich ist.

Die aus dem Forschungsbereich der *Graphgrammatiken* bekannten Techniken wären wohl durchaus anwendbar. Dies bedeutete aber, zumindest in vorliegender Arbeit, wohl ein mit-Kanonen-auf-Spatzen-Schießen.

Wir wählen deshalb den umgekehrten Weg, eine *token-basierte* Repräsentation anzugeben, und die Übersetzung vom graphischen Symbol in die entsprechende Token-Folge in aller Kürze und informell zu skizzieren. Diese Methode hat darüber hinaus den Vorteil, daß auch der umgekehrte Transformationsweg rechnergestützt durchgeführt werden könnte : Der Benutzer gibt die Token-Sequenz (als „frontend“) vor und der Rechner „rendert“ dann die graphischen Symbole.

Die Komplexität des Problems veranschauliche folgendes Beispiel.

Dieses ist musikalisch nicht gerade sinnvoll, klingt vielmehr scheußlich, zwingt aber die Vielfältigkeit der Notation⁹ :

⁹Es bringt der Reihe nach die Symbole für. . .

- Eine Doppeldominante, nämlich D-Dur = dominantisch zu G-Dur = dominantisch zu C-Dur, zunächst mit Quart-Sext-Vorhalt,
- von welchem zuerst der Sextvorhalt aufgelöst wird,
- und dann auch der Quart-Vorhalt, wobei die Septime hinzutritt und der Grundton (d) verschwindet, deshalb sind die Buchstaben *durchgestrichen*.
- Sodann erklingt ein ebenfalls „verkürzter“, grundtonloser Zwischendominantklang, also eine *Dominate*, die sich auf eine andere Funktion bezieht als die C-Dur-Tonika. Die runden Klammern beschreiben sozusagen einen „lokalen scope“, dessen Bezugston die auf die schliessende Klammer folgende Funktion ist.
- Diese Funktion ist ein a-moll (Tp), welches aber *gar nicht erklingt*, sondern nur entweder „angeblich

18 19

C-Dur : D^4 D^5_b $(D^7_b)[Tp]$ D^7

C-Dur : T^1 ts

1

2

Seit den ersten Versuchen von RIEMANN wurden Dutzende von Varianten und Erweiterungen dieser Notationssysteme entwickelt, – bis hin zur Symbolik der Jazz-Harmonielehre. Grundlegend gemeinsam aber ist allen diesen teils ad-hoc, teils systematisch entwickelten Systemen, daß gleichsam *vier Lesedimensionen* der Reihe nach zu codieren/zu decodieren sind :

1. In der *Vertikalen* stehen gleichzeitig klingende Funktionen übereinander, – was schon im Barock seit Erfindung des Orgelpunktes nicht unüblich ist, seit WAGNER und BERLIOZ zum guten Ton gehört¹⁰.
Oder aber *verschiedenen Interpretationen* desselben Vordergrund-Vorganges werden vertikal gestackt (im Notenbeispiel nicht vorhanden).
2. Dann folgen in der *Horizontalen* die einzelnen Funktionsbuchstaben in ihrem *zeitlichen* Verlauf,
3. deren *vertikale* Zahlensäulen die einzelnen Akkordtöne andeuten,
4. die wiederum durch ihre *relative horizontale Position* einzelne *Stimmführungen* andeuten können (in unserem Spielmodell nicht unterstützt, s.u).

Diese vier Achsen gilt es nun, (1) maschinenlesbar zu kodieren und (2) mit einer exakten Bedeutung zu versehen.

Der erste Schritt der Codierung besteht darin, die komplexe Typographie auf reine ASCII-Sequenzen abzubilden.

Obiges Beispiel hieße dann :

18 19

(C-Dur : $DD6+4$, 54 $1/7$, $(D1/7:)[Tp]$, $D1/7$)
(C-Dur : $T1|3-5-$)

erwartet wird“ oder – neutraler formuliert – zur Definition des gerade beendeten „scopes“ dienen soll.

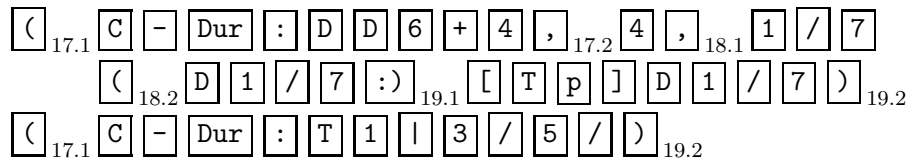
- zuletzt eine ganz normale Dominante, ebenfalls ohne Grundton.

Gleichzeitig liegt im unteren System ein *Orgelpunkt*, nämlich die Tonika von C-Dur, repräsentiert durch nur einen klingenden Ton, den Grundton des Dreiklanges als *tasto solo*.

¹⁰So ist der hypertrophierte Dominatnklang vor der Reprise von MAHLER II/1, siehe oben Seite 7, auch als Türmung $D+s+t$ darstellbar.

Der nächste Schritt besteht in einer (gedachten) Tokenization, bei der alle Trennsymbole („“, „“, „(“, „)“) mit dem „Zeitpunkt ihrer Gültigkeit“ attribuiert werden, – die *graphische Position* des jeweils folgenden Nicht-Trennzeichens wird übersetzt in den entsprechenden notationell-metrischen Zeitpunkt. Diesen stellen wir als Subskript am Token dar.

Für unser Beispiel erhalten wir :



3.2 Zur Notation.

Wir geben nun an eine konkrete Syntax, welche sich ohne weiteren Kommentar verstehen sollte, und eine teils operationale, teils denotationelle Semantik.

Diese wird weitgehend kommentiert, so daß sich aus diesen Kommentaren auch die Bedeutung der evtl. nicht selbsterklärenden syntaktischen Konstrukte ergeben sollte.

Zur (vermeintlichen ?) Entlastung der Notation führen wir keine Abstrakte Syntax ein, sondern werten direkt die Token-Folgen aus.

Dabei verzichten wir sogar auf eine explizite Listennotation. Vielmehr stehen in den verschiedenen „semantischen Klammern“ unmittelbar Folgen von Terminalen Objekten resp. (entsprechend deklarierten) Segmentvariablen. Die bloße Juxtaposition steht somit für Listenbildung resp. -konkatenation.

In den Gleichungen der Semantik bedeutet die Schreibweise $\alpha \in_A \langle \text{GrammatikAusdruck} \rangle$, daß α eine (evtl. leere) Folge von Terminalen ist, welche aus dem gegebenen Ausdruck der Grammatik ableitbar ist.

Besonders bedeutet $\beta \in_A \text{TerminalSequenz}$, daß β eine (evtl. leere) Folge von *beliebigen* Terminalen ist, welche nur dadurch eingeschränkt wird, daß die *Gesamtfolge*, von der diese Folge ein Teil ist, syntaktisch korrekt ist.

Wir stellen im folgenden dar : Nonterminale der Syntax in *kursiver Schrift.*, Terminale der Syntax in **Rahmen**, Mengen und Funktionen der Träger der Semantik serifenlos und konstante Objekte der Semantik in **teleType**.

erstes :	$\text{seq}(\alpha)$	\longrightarrow	α
letztes :	$\text{seq}(\alpha)$	\longrightarrow	α
... liefern das erste/letzte Element einer nicht-leeren Liste.			
setof :	$\text{seq}(\alpha)$	\longrightarrow	$\mathcal{P}(\alpha)$
... liefert die Menge aller auftretenden Werte in einer Liste.			
μ :	$\mathcal{P}(\alpha)$	\longrightarrow	$\alpha \bullet \mu\{a\} = a$
... liefert das einzige Element einer einelementigen Menge.			
$\{m \dots n\}$			
... liefert das Intervall von m bis n .			
A, B			
C			
<hr/>			
$== (A \wedge B \wedge C) \implies (D \wedge E)$			
D			
E			
$\llbracket ab \rrbracket$	$==$	$\llbracket \langle a, b \rangle \rrbracket$	
$\llbracket a \alpha b \rrbracket$	$==$	$\llbracket \langle a \rangle \wedge \alpha \wedge \langle b \rangle \rrbracket$	

Tabelle 1: Hilfsfunktionen und Schreibweisen.

3.3 Syntax der Tokendarstellung

<i>FunktionaleInterpretation</i>	==	$($ _t <i>TonartBezeichnung</i> $:$ <i>FunktionenFolge</i> $)$ _t
<i>TonartBezeichnung</i>	==	<i>TonartGrundton</i> $-$ <i>TonartGeschlecht</i>
<i>TonartGrundton</i>	==	ces c cis des d dis es e f fis ges g gis as a ais b h
<i>TonartGeschlecht</i>	==	Dur moll
<i>FunktionenFolge</i>	==	<i>erlaubtesSegment</i> $($ _t <i>erlaubtesSegment</i> $)$ _t *
<i>Bezugsfunktion</i>	==	<i>FunktionsKlang</i> $[$ <i>AbstrakterFnktDreiklang</i> $]$
<i>erlaubtesSegment</i>	==	<i>FunktionsKlang</i> <i>Bezugsfunktion</i> $($ _t <i>FunktionenFolge</i> $)$ _t $($ _t <i>FunktionenFolge</i> $:$ $)$ _t <i>Bezugsfunktion</i> $($ _t <i>FunktionenFolge</i> $:$ $)$ _t <i>FunktionsKlang</i> $($ _t <i>FunktionenFolge</i> $)$ _t <i>FunktionaleInterpretation</i> <i>erlaubtesSegment</i> $+$ <i>erlaubtesSegment</i>
<i>FunktionsKlang</i>	==	<i>AbstrakterFnktDreiklang</i> <i>KlangGestalt</i> $($ _t <i>KlangGestalt</i> $)$ _t *
<i>AbstrakterFnktDreiklang</i>	==	<i>Quintstufe</i> <i>Quintstufe</i> $($ <i>Terzschrift</i> ⁺ <i>Quintschrift</i> ⁺ $)$ [*] <i>Terzschrift</i> [*]
<i>Quintschrift</i>	==	D ⁺ d ⁺ S ⁺ s ⁺
<i>Quintstufe</i>	==	T t <i>Quintschrift</i>
<i>Terzschrift</i>	==	p P g G \uparrow \downarrow
<i>KlangGestalt</i>	==	<i>KlangIntervall</i> [*] <i>KlangIntervall</i> $ $ <i>KlangIntervall</i> [*]
<i>KlangIntervall</i>	==	<i>IntervallZahl</i> <i>IntervallForm</i>
<i>IntervallZahl</i>	==	1 3 5 7 8 10 2 4 6 9 11
<i>IntervallForm</i>	==	/ + - > >> < << \square

Tabelle 2: Syntax unserer \mathcal{L}_{RIE} .

3.4 Trägermengen für die Modellierung der Semantik

<i>Grundmengen:</i>	
Zeit	== \mathbb{N}
FnkGesch	== $\{\text{Dur}, \text{moll}\}$
QuintTon	== $\{n \in \mathbb{N} \mid -15 \leq n \leq 19\} \times \{\text{FnkQuint_Von_C}\}$
QuintSchritt	== $\mathbb{N} \times \{\text{FnkQuint}\}$
Akkord	== $(\text{QuintTon} \cup \{\perp\}) \times \mathcal{P}(\text{QuintTon}) \times (\text{QuintTon} \cup \{\perp\})$ // d.i. Tonklasse des nominellen Grundtons, alle klingenden Tonklassen, Tonklasse des tatsächlichen Baßtons, falls angegeben.
AkkordFolge	== $\text{Zeit} \rightarrow \text{Akkord}$
<i>Hilfsfunktionen:</i>	
$_{+}$: $\text{QuintTon} \times \text{QuintSchritt} \rightarrow \text{QuintTon} \cup \{\perp\}$
•	$(a, _) + (b, _) = \begin{cases} (a + b, \text{FnkQuint_Von_C}) & \text{falls } -15 \leq (a + b) \leq 19 \\ \perp & \text{andernfalls.} \end{cases}$
$_{-}$: $\text{QuintTon} \times \text{QuintSchritt} \rightarrow \text{QuintTon} \cup \{\perp\}$
•	$(a, _) + (b, _) = \begin{cases} (a - b, \text{FnkQuint_Von_C}) & \text{falls } -15 \leq (a - b) \leq 19 \\ \perp & \text{andernfalls.} \end{cases}$
$_{+}$: $\text{QuintSchritt} \times \text{QuintSchritt} \rightarrow \text{QuintSchritt}$
•	$(a, _) + (b, _) = (a + b, _)$
$_{*}$: $\mathbb{N} \times \text{QuintSchritt} \rightarrow \text{QuintSchritt}$
•	$n * (a, _) = (n * a, _)$
\uplus	: $\text{AkkordFolge} \times \text{AkkordFolge} \rightarrow \text{AkkordFolge} \cup \{\text{error}\}$
•	$\uplus(a, b) = \{\forall t \in \text{dom } a \cap \text{dom } b \bullet t \mapsto \text{mergeOne}(a(t), b(t))\} \cup a \setminus (\text{dom } b \times \text{Akkord}) \cup b \setminus (\text{dom } a \times \text{Akkord})$
mergeOne	: $\text{Akkord} \times \text{Akkord} \rightarrow \text{Akkord} \cup \{\text{error}\}$
•	$\text{mergeOne}((g_1, t_1, b_1), (g_2, t_2, b_2)) = (\text{mergeG}(g_1, g_2), t_1 \cup t_2, \text{mergeB}(b_1, b_2))$
mergeB	: $\text{QuintTon} \times \text{QuintTon} \rightarrow \text{QuintTon} \cup \{\text{error}\}$
•	$\uplus(b_1, b_2) = \begin{cases} \text{Error: „Nur ein(1) Ton darf expliziter Baßton sein !“} & \text{falls } b_1 \neq b_2 \wedge b_1 \neq \perp \wedge b_2 \neq \perp \\ b_1 & \text{falls } b_2 = \perp \\ b_2 & \text{andernfalls} \end{cases}$
mergeG	: $\text{QuintTon} \times \text{QuintTon} \rightarrow \text{QuintTon} \cup \{\perp\}$
•	$\uplus(g_1, g_2) = \begin{cases} \perp & \text{falls } g_1 \neq g_2 \\ g_1 & \text{falls } g_2 = \perp \\ g_2 & \text{andernfalls} \end{cases}$

Tabelle 3: Basis der Semantik.

Die semantischen Hilfsfunktionen und ihre Kontexte lauten :

$\llbracket - \rrbracket$:	<i>Funktionale Interpretation</i> \longrightarrow $\text{AkkordFolge} \cup \{\text{error}\}$
$\llbracket - \rrbracket^{\mathcal{T}}$:	<i>Tonartbezeichnung</i> \longrightarrow $(\text{QuintTon} \times \text{QuintTon}) \cup \{\text{error}\}$
$\text{--}\llbracket - \rrbracket\text{--}$:	$\text{Zeit} \times \text{Zeit} \times \text{FunktionenFolge} \times \text{QuintTon} \times \text{QuintTon}$ \longrightarrow $\text{AkkordFolge} \cup \{\text{error}\}$
$t_0, t_1 \llbracket \alpha \rrbracket_{v,b}$		$t_0 =$ Startzeitpunkt. $t_1 =$ Endzeitpunkt, exklusiv. $\alpha =$ Zu übersetzende <i>FunktionenFolge</i> . $v =$ Tonvorrat für Klangbildung, gegeben durch Grundton einer Durskala. $b =$ Lokaler Bezugston.
$\llbracket - \rrbracket_{\text{--}}^{\mathcal{G}}$:	<i>AbstrakterFnktDreiklang</i> \times $\text{QuintTon} \times \text{FnkGesch}$ \longrightarrow $\text{QuintTon} \times \text{FnkGesch} \cup \{\text{error}\}$
$\llbracket a \rrbracket_{b,d}^{\mathcal{G}}$		$a =$ Zu übersetzende <i>AbstrakterFnktDreiklang</i> . $b =$ Lokaler Bezugston. $d \in \{\text{Dur}, \text{moll}\}$
$\llbracket - \rrbracket_{\text{--}\text{--}\text{--}}^{\mathcal{K}}$:	<i>KlangGestalt</i> \times $\text{QuintTon} \times \text{QuintTon} \times \text{FnkGesch} \times \{\boxed{\text{D}}, \perp\}$ \longrightarrow Akkord
$\llbracket \beta \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{K}}$		$\beta =$ Zu übersetzende <i>KlangGestalt</i> . $v =$ Grundton des Tonvorrates zur Intervallgrößenbestimmung. $g =$ Grundton des Akkordes. $m =$ Geschlecht der Akkordterz. $d =$ Ist es ein $\boxed{\text{D}}$ -Akkord?
$\llbracket - \rrbracket_{\text{--}\text{--}\text{--}}^{\mathcal{I}}$:	<i>KlangGestalt</i> \times $\text{QuintTon} \times \text{QuintTon} \times \text{FnkGesch} \times \{\boxed{\text{D}}, \perp\}$ \longrightarrow $\mathcal{P}(\text{QuintTon})$
$\llbracket \beta \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}$		wie oben
nachton	:	<i>KlangIntervall</i> \times $\text{QuintTon} \times \text{QuintTon} \longrightarrow \text{QuintTon}$
nachton(γ, v, g)		$\gamma =$ Zu übersetzendes <i>KlangIntervall</i> . v, g wie oben

Tabelle 4: Übersicht der Semantischen Funktionen und ihrer den Kontext repräsentierenden Parameter.

Ohne auf die kontroversen Diskussionen der unterschiedlichen „Domain-Theorien“, in unserem Falle „Tonhöhen-Algebren“, näher einzugehen, wählen wir willkürlich (aber möglichst neutral) *erstens* die Modellierung der „Tonklassen“ durch die Abstände der Töne von der Klasse von C gemessen in Quinten, *zweitens* die Modellierung von Akkorden als 3-Tupel aus (a) einer Tonklasse, welche den Grundton benennt, und (b) einer Men-

ge von Tonklassen, welche die klingenden Töne des Akkordes benennen¹¹ und (c) einer Tonklasse, welche den Baßton bezeichnet.

Die *semantische Auswertungsfunktion*¹² soll also jedem (kontext-korrekten !) Eingabesatz, der aus dem Nonterminal *FunktionaleInterpretation* herleitbar ist, als Bedeutung eine Folge von Elementen aus *Akkord* zuordnen .

Da die Kontexte der semantischen Auswertung relativ klein sind, definieren wir keine eigene Objektstruktur, sondern schreiben die Bestandteile des Kontextes in das Subskript der Semantikfunktionen.

Die oberste Semantikfunktion $[[_]]$ ordnet jeder (korrekten) *FunktionaleInterpretation* eine *partielle Funktion* von Zeit in die (oktavabstrahierten, grundton- und baßtonausgezeichneten) Akkorde zu. Eine gleichnamige Funktion $_{-}[[_]]_{-}$ geht aus von *FunktionenFolge*, hat aber den Grundton der der Haupttonart entsprechenden Durscala und den aktuellen Bezugston im Kontext.

Die Hilfsfunktion $[[_]_{-}^{\mathcal{G}}$ berechnet für jeden Ausdruck \in_A *AbstrakterFnktDreiklang* (also auf der terminalen Ebene jeder erlaubten Folge von Funktionsbuchstaben) den Grundton des Akkordes und das Geschlecht seiner Terz.

Die zweite Hilfsfunktion $[[_]_{-}^{\mathcal{K}}$ ordnet dann der Ziffernmatrix, also einem syntaktischen Element \in_A *KlangGestalt* einen konkreten *Akkord* zu, also Grundton, Tonklassenmenge und Baßton. Sie übernimmt drei zusätzliche Bestimmungen in den Kontext : die soeben (mittels $[[_]_{-}^{\mathcal{G}}$) errechneten Grundton und Akkordgeschlecht, sowie die Feststellung, ob der letzte Funktionsbuchstabe ein großes $\boxed{\text{D}}$ war, welche Information zur Bestimmung der Septimgröße benötigt wird.

¹¹Man beachte den möglichen Fall des „verkürzten“ Akkordes : $(a, b, _) \in \text{Akkord} \wedge a \notin b !$

¹²Wir stoßen hier auf ein grundsätzliches Problem der Darstellung in allen interdisziplinären Texten : das Wort „Funktion“ bezeichnet hier den *Begriff* „Funktion im Sinne der Mathematik“, während es an anderen Stellen den Begriff aus der Musiktheorie bezeichnet, welcher etwas völlig anderes ist.

Beide Begriffe werden benötigt.

Man könnte sich mit einer „indizierten Schreibweise“ behelfen, welche „Funktion_{math}“ und „Funktion_{mus}“ verwendet, – was aber spätestens in Fußnoten zu einiger Unbequemlichkeit führt.

Im folgenden gehen wir davon aus, daß der Kontext des Wortes den Begriff eindeutig zu identifizieren erlaubt.

3.5 Zentrale Parsierungs- und Übersetzungsfunktionen

$\text{qiabs} : \text{TonartGrundton} \longrightarrow \text{QuintTon}\bullet$
$\text{qiabs}(\text{ces}) = (-7, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{ges}) = (-6, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{des}) = (-5, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{as}) = (-4, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{es}) = (-3, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{b}) = (-2, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{f}) = (-1, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{c}) = (0, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{g}) = (1, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{d}) = (2, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{a}) = (3, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{e}) = (4, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{h}) = (5, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{fis}) = (6, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{cis}) = (7, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{gis}) = (8, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{dis}) = (9, \text{FnkQuint_Von_C})$
$\text{qiabs}(\text{ais}) = (10, \text{FnkQuint_Von_C})$

Tabelle 5: Semantik der Tonartbezeichnungen.

$$\frac{a \in_A \text{TonartGrundton} , \quad x = \text{qiabs}(a) \in \{-7 \dots + 7\}}{\llbracket a \quad \boxed{-} \quad \boxed{\text{Dur}} \rrbracket^T = (x, x)}$$

$$\frac{a \in_A \text{TonartGrundton} , \quad x = \text{qiabs}(a) \notin \{-7 \dots + 7\}}{\llbracket a \quad \boxed{-} \quad \boxed{\text{Dur}} \rrbracket^T = \text{Error: „Dur-Tonarten über Cis-Dur gipps nich !”}}$$

$$\frac{a \in_A \text{TonartGrundton} , \quad x = \text{qiabs}(a) \in \{-4 \dots + 10\}}{\llbracket a \quad \boxed{-} \quad \boxed{\text{moll}} \rrbracket^T = (x - (3, \text{QuintSchritt}) , x)}$$

$$\frac{a \in_A \text{TonartGrundton} , \quad x = \text{qiabs}(a) \notin \{-4 \dots + 10\}}{\llbracket a \quad \boxed{-} \quad \boxed{\text{moll}} \rrbracket^T = \text{Error: „moll-Tonarten unter as-moll gipps nich !”}}$$

$$\frac{\alpha \in_A \text{TonartBezeichnung} , \quad \gamma \in_A \text{FunktionenFolge} , \quad \llbracket \alpha \rrbracket^T = (v, b)}{\dashv\vdash \llbracket \boxed{(\quad)_{t_0}} \alpha \boxed{:} \gamma \boxed{)}_{t_1} \rrbracket \dashv\vdash = t_0, t_1 \llbracket \gamma \rrbracket_{v, b}}$$

$$\begin{array}{l}
A \in_A \text{AbstrakterFnktDreiklang} \\
\beta \in \text{TerminalSequenz} \\
K \in \{ \boxed{(:)}, \boxed{[}, \boxed{]}, \boxed{,} \} \\
\hline
t_0, t_1 \llbracket A \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket A \begin{array}{|c|} \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \boxed{5} \\ \hline \end{array} \rrbracket_{v,b} \\
t_0, t_1 \llbracket A K_{t_2} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket A \begin{array}{|c|} \hline \boxed{3} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \boxed{5} \\ \hline \end{array} K_{t_2} \beta \rrbracket_{v,b}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
A, A_2 \in_A \text{AbstrakterFnktDreiklang}, \quad B, B_2 \in_A \text{KlangGestalt} \\
\beta \in \text{TerminalSequenz} \\
\llbracket A \rrbracket_{b,-}^{\mathcal{G}} = (g, dm) \in \text{QuintTon} \times \text{FnkGesch} \\
do = \begin{cases} \boxed{D} & \text{falls letztes}(A) = \boxed{D} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \\
K \in \{ \boxed{[}, \boxed{]} \} \\
\hline
t_0, t_1 \llbracket A B \rrbracket_{v,b} = \{ \forall t \in \text{Zeit} \mid t_0 \leq t < t_1 \bullet t \mapsto \llbracket B \rrbracket_{v,g,dm,do}^{\mathcal{K}} \} \\
t_0, t_2 \llbracket A B \begin{array}{|c|} \hline \boxed{,} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} B_2 \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket A B \rrbracket_{v,b} \uplus t_1, t_2 \llbracket A B_2 \beta \rrbracket_{v,b} \quad \text{3} \\
t_0, t_2 \llbracket A B \begin{array}{|c|} \hline \boxed{,} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} A_2 \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket A B \rrbracket_{v,b} \uplus t_1, t_2 \llbracket A_2 \beta \rrbracket_{v,b} \\
t_0, t_2 \llbracket A B \begin{array}{|c|} \hline \boxed{+} \\ \hline \end{array} K_{t_1} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket A B \rrbracket_{v,b} \uplus t_1, t_2 \llbracket K \beta \rrbracket_{v,b} \\
t_0, t_2 \llbracket A B \begin{array}{|c|} \hline \boxed{+} \\ \hline \end{array} K_{t_1} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket A B \rrbracket_{v,b} \uplus t_1, t_2 \llbracket K \beta \rrbracket_{v,b}
\end{array}$$

v ist der Grundton des (durch die bezeichnete Tonart bestimmten) Tonvorrates, b der momentane Bezugston für die Auswertung von *AbstrakterFnktDreiklang*, g der so berechnete Grundton des Klanges, dm sein Geschlecht und do ein „Dominaten-Indikator“, später benötigt zur Größenbestimmung einer nicht qualifizierten $\boxed{7}$.

$$\begin{array}{l}
A \in_A \text{AbstrakterFnktDreiklang}, \quad B \in_A \text{KlangGestalt} \\
F, F_2 \in_A \text{FunktionenFolge} \\
\beta \in \text{TerminalSequenz} \\
\llbracket A \rrbracket_{b,-}^{\mathcal{G}} = (g, _) \in \text{QuintTon} \times \text{FnkGesch} \\
\hline
t_0, t_3 \llbracket A B \begin{array}{|c|} \hline \boxed{(:)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} F \begin{array}{|c|} \hline \boxed{)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_2 \\ \hline \end{array} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket A B \rrbracket_{v,b} \uplus t_1, t_2 \llbracket F \rrbracket_{v,g} \uplus t_2, t_3 \llbracket \beta \rrbracket_{v,b} \\
t_0, t_2 \llbracket \begin{array}{|c|} \hline \boxed{[} \\ \hline \end{array} A \begin{array}{|c|} \hline \boxed{]} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \boxed{(:)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} F \begin{array}{|c|} \hline \boxed{)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket F \rrbracket_{v,g} \uplus t_1, t_2 \llbracket \beta \rrbracket_{v,b} \\
t_0, t_2 \llbracket \begin{array}{|c|} \hline \boxed{[} \\ \hline \end{array} F \begin{array}{|c|} \hline \boxed{(:)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \boxed{[} \\ \hline \end{array} A \begin{array}{|c|} \hline \boxed{]} \\ \hline \end{array} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket F \rrbracket_{v,g} \uplus t_1, t_2 \llbracket \beta \rrbracket_{v,b} \\
t_0, t_4 \llbracket \begin{array}{|c|} \hline \boxed{[} \\ \hline \end{array} F \begin{array}{|c|} \hline \boxed{(:)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \boxed{[} \\ \hline \end{array} A \begin{array}{|c|} \hline \boxed{]} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \boxed{(:)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_2 \\ \hline \end{array} F_2 \begin{array}{|c|} \hline \boxed{)} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline t_3 \\ \hline \end{array} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket F \rrbracket_{v,g} \uplus t_2, t_3 \llbracket F_2 \rrbracket_{v,g} \uplus t_3, t_4 \llbracket \beta \rrbracket_{v,b}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
A \in_A \text{AbstrakterFnktDreiklang} \\
\beta \in \text{TerminalSequenz} \\
\text{erstes } \beta \neq \boxed{(:)} \\
\hline
_, _ \llbracket \begin{array}{|c|} \hline \boxed{[} \\ \hline \end{array} A \begin{array}{|c|} \hline \boxed{]} \\ \hline \end{array} \rrbracket _, _ = \{ \} \\
t_0, t_1 \llbracket \begin{array}{|c|} \hline \boxed{[} \\ \hline \end{array} A \begin{array}{|c|} \hline \boxed{]} \\ \hline \end{array} \beta \rrbracket_{v,b} = t_0, t_1 \llbracket \beta \rrbracket_{v,b}
\end{array}$$

3.6 Berechnung Abstrakter Funktionsdreiklänge durch Anwendung von $[[_]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}}$ auf Funktionsbuchstaben

3.6.1 Vorrangige Regeln

Normierung :

$$\begin{array}{l}
 X \in \{ \boxed{\text{T}}, \boxed{\text{D}}, \boxed{\text{S}}, \boxed{\text{P}}, \boxed{\text{G}} \} \\
 x \in \{ \boxed{\text{t}}, \boxed{\text{d}}, \boxed{\text{s}}, \boxed{\text{p}}, \boxed{\text{g}} \} \\
 \hline
 [[X \boxed{\text{P}} \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} = [[X \boxed{\text{p}} \uparrow \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} \\
 [[X \boxed{\text{G}} \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} = [[X \boxed{\text{g}} \uparrow \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} \\
 [[x \boxed{\text{p}} \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} = [[x \boxed{\text{P}} \downarrow \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} \\
 [[x \boxed{\text{g}} \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} = [[x \boxed{\text{G}} \downarrow \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}}
 \end{array}$$

Erkennung von Kontextfehlern :

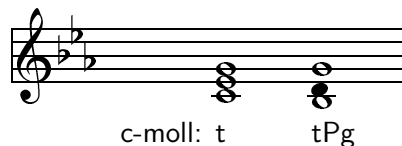
$$\begin{array}{l}
 \hline
 [[\boxed{\text{P}} \boxed{\text{p}} \alpha]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}} = \\
 [[\boxed{\text{p}} \boxed{\text{P}} \alpha]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}} = \text{Error: „redundanter Parallelübergang.“} \\
 [[\boxed{\text{G}} \boxed{\text{g}} \alpha]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}} = \\
 [[\boxed{\text{g}} \boxed{\text{G}} \alpha]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}} = \text{Error: „redundanter Nebenklangübergang.“}
 \end{array}$$

...erfasst Fehlerfälle wie $\boxed{\text{S}} \boxed{\text{p}} \boxed{\text{P}} = \boxed{\text{S}}$. Man beachte, daß diese Regel im Rahmen unseres Parsers nur „am Kopf“ eines nicht ausgewerteten Restterms greift !

Z.B. ist $\boxed{\text{s}} \boxed{\text{p}} \boxed{\text{P}}$ mitnichten redundant; vielmehr verbirgt sich hinter den zwei aufeinanderfolgenden Kleibuchstaben eine verborgenen Vermollung, welche wir durch die vorhergehende Normalisierungsregel ja explizit machen : $\boxed{\text{s}} \boxed{\text{p}} \boxed{\text{P}} \Rightarrow \boxed{\text{s}} \boxed{\text{P}} \boxed{\downarrow} \boxed{\text{P}}$, und keine Redundanz ist zu sehen !

$$\begin{array}{l}
 \hline
 [[\boxed{\text{p}} \boxed{\text{G}} \alpha]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}} = \text{Error: „besser } \boxed{\text{S}} \text{ !“} \\
 [[\boxed{\text{g}} \boxed{\text{P}} \alpha]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}} = \text{Error: „besser } \boxed{\text{D}} \text{ !“} \\
 [[\boxed{\text{G}} \boxed{\text{p}} \alpha]_{\rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{G}} = \text{Error: „besser } \boxed{\text{s}} \text{ !“}
 \end{array}$$

Interessanterweise könnte $\boxed{\text{P}} \boxed{\text{g}}$ als Alternative zu $\boxed{\text{d}}$ durchaus sinnvoll sein und die Aura von Archaik und Verlorenheit der „moll-Dominante“ sogar zutreffend wiedergeben :



$$x \in \{ \boxed{\text{D}}, \boxed{\text{S}}, \boxed{\text{d}}, \boxed{\text{s}} \}$$

$$\begin{array}{l}
 \hline
 [[\uparrow x \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} = \text{Error: „redundante Verdurung.“} \\
 [[\downarrow x \alpha]_{y,m}^{\mathcal{G}} = \text{Error: „redundante Vermollung.“}
 \end{array}$$

9

3.6.2 Nachrangige Regeln

(Keine Vorrangige Regel anwendbar.)

$\llbracket \epsilon \rrbracket_{h,m}^{\mathcal{G}}$	$= (h, m)$
$\llbracket \boxed{\text{T}} \alpha \rrbracket_{h,-}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h,\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{t}} \alpha \rrbracket_{h,-}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h,\text{moll}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{D}} \alpha \rrbracket_{h,-}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h+(1,\text{FnkQuint}),\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{d}} \alpha \rrbracket_{h,-}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h+(1,\text{FnkQuint}),\text{moll}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{S}} \alpha \rrbracket_{h,-}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h-(1,\text{FnkQuint}),\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{s}} \alpha \rrbracket_{h,-}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h-(1,\text{FnkQuint}),\text{moll}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{P}} \alpha \rrbracket_{h,\text{moll}}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h-(3,\text{FnkQuint}),\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{p}} \alpha \rrbracket_{h,\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h+(3,\text{FnkQuint}),\text{moll}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{G}} \alpha \rrbracket_{h,\text{moll}}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h-(4,\text{FnkQuint}),\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\text{g}} \alpha \rrbracket_{h,\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h+(4,\text{FnkQuint}),\text{moll}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\uparrow} \alpha \rrbracket_{h,\text{moll}}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h,\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$
$\llbracket \boxed{\downarrow} \alpha \rrbracket_{h,\text{Dur}}^{\mathcal{G}}$	$= \llbracket \alpha \rrbracket_{h,\text{moll}}^{\mathcal{G}}$

3.7 Berechnung konkreter klingender Tonklassen durch Anwendung von $\llbracket - \rrbracket_{\text{---},\text{---}}^{\mathcal{K}}$ auf Funktionszahlen

3.7.1 Bestimmung des Baßtons

Ist kein $\boxed{\text{I}}$ vorhanden, so ist Baßton gleich Grundton, und wir vermerken im Resultat, daß keine explizit Baßtonangabe erfolgt ist :

$$\frac{\alpha \in_A \text{KlangGestalt} \quad \boxed{\text{I}} \notin \text{setof}(\alpha)}{\llbracket \alpha \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{K}} = (g, \llbracket \alpha \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}, \perp)}$$

Ansonsten gibt die erste Intervallangabe (vor dem Zeichen $\boxed{\text{I}}$) den Ton im Baß an :

$$\frac{a \in_A \text{KlangIntervall} \quad \beta \in_A \text{KlangGestalt} \cup \{\epsilon\}}{\llbracket a \boxed{\text{I}} \beta \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{K}} = (g, \llbracket a \beta \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}, \mu \llbracket a \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}})}$$

3.7.2 Ergänzung des Modifikators für „kein Modifikator angeben“

Wird eine Intervallzahl nicht von einer expliziten Größen-, Alterations- oder Nichterklingen-Angabe gefolgt ($\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{>}$, $\boxed{<}$, $\boxed{/}$), so wird der Modifikator „natürliche Größe“ = $\boxed{\square}$ eingefügt. Diese Regel ist rein technischer Natur und begründet die Ausgangssituation für die Bestimmung der Intervallgrößen weiter unten :

$$\frac{z_1, z_2 \in_A \text{IntervallZahl}}{\begin{aligned} \llbracket z_1 z_2 \alpha \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} &= \llbracket z_1 \boxed{\square} z_2 \alpha \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} \\ \llbracket z_1 \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} &= \llbracket z_1 \boxed{\square} \rrbracket_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} \end{aligned}}$$

3.7.3 Implizites Erklingen der Dreiklangstöne

Folgende drei Regeln reflektieren die (historisch begründete und praktisch zweckmäßige, ja unverzichtbare) Sonderregel, daß die Ausformung eines Funktionsklanges als *Dreiklang* niemals explizit geschrieben werden muß, – Grundton, Terzton und Quintton werden als „normalerweise“ erklingend vorausgesetzt.

Genauer : falls weder Sekunde noch Terz noch Quarte explizit angegeben sind, dann klingt die Terz; falls weder Sexte noch Quinte angegeben, klingt die Quinte; der Grundton klingt immer.

Dies hatte oben die Notwendigkeit zur Folge, für das *Nichtklingen* von Terz oder Quinte (oder Grundton in „verkürzten“ Akkorden) den Modifikator $\boxed{/}$ einzuführen.

$$\frac{\text{setof } \alpha \cap \{ \boxed{1} \} = \{ \}}{[[\alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} = [[\boxed{1} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}}$$

$$\frac{\text{setof } \alpha \cap \{ \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4} \} = \{ \}}{[[\alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} = [[\boxed{3} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}}$$

$$\frac{\text{setof } \alpha \cap \{ \boxed{5}, \boxed{6} \} = \{ \}}{[[\alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} = [[\boxed{5} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}}$$

$$\frac{Z \in \{ \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{5} \}}{[[Z \boxed{/} \alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} = [[\alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}}$$

3.7.4 Sonderregeln für Grundton, Terzton und Dominantseptime

$$\frac{X \neq \text{Dur} \vee Y \neq \boxed{D}}{M \in_A \text{IntervallForm} \setminus \{ \boxed{\square}, \boxed{/} \}}$$

$$\frac{}{[[\boxed{1} M \alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} = \text{Error: „Alteration des Grundtones nicht erlaubt.“}}$$

$$[[\boxed{1} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,A,B}^{\mathcal{I}} = \{ \text{nachton}((\boxed{1}, \boxed{\square}), v, g) \} \cup [[\alpha]]_{v,g,A,B}^{\mathcal{I}} \quad \rightarrow 10$$

$$[[\boxed{3} M \alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} = \text{Error: „Explizite Benennung der Terz-Größe nicht erlaubt.“}$$

$$[[\boxed{3} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,\text{Dur},d}^{\mathcal{I}} = \{ \text{nachton}((\boxed{3}, \boxed{+}), -, g) \} \cup [[\alpha]]_{v,g,\text{Dur},d}^{\mathcal{I}} \quad \rightarrow 11$$

$$[[\boxed{3} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,\text{moll},d}^{\mathcal{I}} = \{ \text{nachton}((\boxed{3}, \boxed{-}), -, g) \} \cup [[\alpha]]_{v,g,\text{moll},d}^{\mathcal{I}}$$

$$[[\boxed{7} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,\text{Dur},\boxed{D}}^{\mathcal{I}} = \{ \text{nachton}((\boxed{7}, \boxed{-}), -, g) \} \cup [[\alpha]]_{v,g,\text{Dur},-}^{\mathcal{I}}$$

$$[[\boxed{7} \boxed{\square} \alpha]]_{v,g,X,Y}^{\mathcal{I}} = \{ \text{nachton}((\boxed{7}, \boxed{\square}), v, g) \} \cup [[\alpha]]_{v,g,X,Y}^{\mathcal{I}} \quad \rightarrow 12$$

3.7.5 Übersetzung aller Intervallziffern außer 1, 3 und 7

$$\frac{Z \in_A \text{IntervallZahl} \quad M \in_A \text{IntervallForm}}{Z \neq \boxed{1} \wedge Z \neq \boxed{3} \wedge (Z, M) \neq (\boxed{7}, \boxed{\square})}$$

$$\frac{}{[[\alpha]]_{v,g,d,m}^{\mathcal{I}} = \{ \}}$$

$$[[Z M \alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}} = \{ \text{nachton}((Z, M), v, g) \} \cup [[\alpha]]_{v,g,m,d}^{\mathcal{I}}$$

3.7.6 Übergang von Intervallziffern und -modifikatoren auf Tonklassen, Implizite Intervallgrößen

Die Regel, daß die *Terz* des Dreiklanges sich stets aus dem Geschlecht des Funktionsklanges (gegeben hier durch Groß-/Kleinschreibung des Funktionsbuchstabens ergibt, in anderen Systemen durch Sonderzeichen) ist eindeutig, – explizite Alterationen der Terz sind antiorthogonalerweise verboten.

Bei den anderen Intervallen, welche in zwei verschiedenen Formen (groß und klein) möglich sind¹³, ist das leider nicht so eindeutig!

Man könnte als default-Wert bei großem Funktionsbuchstaben große Intervalle annehmen, bei kleinem kleine, also Sext, Sept, None analog der Terz behandeln, – was musikalisch wenig sinnvoll ist.

Wir modellieren hier das weitverbreitete Verfahren, bei nichtspezifizierter Intervallgröße oder -alteration grundsätzlich die *leitereigenen* Töne zu verwenden. Dabei entstehen neue Antiorthogonalitäten:

- Diese Methode ist übernommen von der (stufenorientierten) Generalmaßbezifferung. Es werden also verschiedene Paradigmen hier gemischt.

- Die gemeinte „Leiter“ ist gegeben durch die letzte explizite *Tonart*-Bezeichnung, deren Geschlecht hier zum ersten Mal überhaupt relevant wird !

Bei erweiterten Funktionen (= lokale scopes) ändert sich die Tonleiter in unserer Implementierung nicht, was zu unerwarteten Resultaten führen kann : C-Dur : SS^4 liefert z.B. einerseits den Klang *b-e(!)-f*, weil *e* und nicht *es* halt leitereigen ist, – die 4 steht also, da nicht explizit modifiziert, für eine *übermäßige* Quarte.

Andererseits ist der Grundton des $SS = B$ -Dur-Klanges paradoxerweise selbst *nicht* leitereigen, obwohl er keinen Modifikator aufweist, ja in unserer Implementierung gar nicht aufweisen kann.

- Jede gewählte Definition von „leitereigen“ ist stets nur für bestimmte Musikstile sinnvoll¹⁴.

- Andererseits gibt diese Technik überhaupt erst eine mögliche Semantik für die zu Beginn jeder Funktionalen Interpretation anzugebende Tonart :

Diese findet ihre Ausprägung (lediglich) in den im funktionalen Sinne nicht-primären Intervallen, also Sekunden, Sexten, Septimen, – oder andersherum : Die „Aurenfelder“ der funktional *nicht signifikanten* Tonklassen konsituieren die „Tonart“ im Sinne eines Tonvorrates.

¹³Intervalle, welche in zwei verschiedenen gleichberechtigten Formen („groß“ und „klein“, entsprechend moll und Dur) auftreten, nennen wir *imperfekte* Intervalle, es sind dies Sekunde, Terz, Sexte, Septime, None, Dezime etc.

Intervalle, welche es nur in einer „reinen“ Form gibt, heißen „perfekt“. Es sind dies Prim, Quart, Quint, Oktave, Undezime etc.

Unabhängig von dieser Einteilung können alle Intervalle in den weiteren Formen „vermindert“, „übermäßig“, „doppelt-vermindert“ und „doppelt-übermäßig“ etc. auftreten.

Das theoretisch größte Intervall im Rahmen der Tonklassen ist *feses-hisis*, die fünffach übermäßige Quarte !

¹⁴So werden z.B. in bestimmten vor-barocken Perioden das „b-mollum“ und das „b-durum“, also die Tonklassen *b* und *h*, gar mit *demselben* Notensymbol bezeichnet, und je nach Kontext (meist: aufwärts *vs.* abwärts) das eine oder andere gemeint. Somit sind, jedenfalls was das Notat betrifft, beide Tonklassen gleichermaßen „leitereigen“.

Das dieser zunächst paradox erscheinende Seiteneffekt unserer Sprachdefinition *kritisch* zu untersuchen sein wird, liegt auf der Hand.

- Alternative Strategien wären in anderen Fällen mindestens ebenso unbefriedigend.
- Zusätzlich finden wir in der Praxis eine Koppelung bestimmter Intervalle an die Funktionsbuchstaben, – so ist i.A. die (unspezifizierte) Septime einer Dominante als kleine gemeint, die einer Durtonika aber als groß!

$$\boxed{\text{D}} \boxed{7} == \boxed{\text{D}} \boxed{7} \boxed{-}$$

$$\boxed{\text{T}} \boxed{7} == \boxed{\text{T}} \boxed{7} \boxed{+}$$

Ersteres modellieren wir auch, weil ja nicht zuletzt Modellierung und Modellierungstechniken von Antiorthogonalitäten wichtiger Bestandteil des Themas sind, – auf letzteres meinen wir verzichten zu können.

Wir stellen also um letztlich auf Tonklassen übergehen zu können, folgende Regeln auf : Falls ein Intervall *mit expliziter Größenangabe* hingeschrieben wurde, so wird der Akkordton berechnet, indem das Intervall unter Berücksichtigung dieser Größenangabe berechnet wird, und auf den Grundton des Akkordes addiert :

$$\frac{i \in_A \text{IntervallZahl}, \quad m \in_A \text{IntervallForm} \setminus \{ \boxed{\square} \boxed{/} \}}{\text{nachton}((i, m), -, g) = g + \text{qischritt}(i, m)}$$

Falls ein *imperfektes* Intervall *ohne* explizite Größenangabe einen Akkordton bestimmt, so wird zwischen den möglichen Ausprägungsformen des Intervalles (groß, klein, vermindert, übermäßig, aber auch doppelt-vermindert, doppelt-übermäßig) unterschieden, indem nur *leitereigene* Töne des gegebenen Tonvorrates gewählt werden:

13

$$\frac{i \in_A \text{IntervallZahl}, \quad i \in \text{imperfect}}{\text{nachton}((i, \boxed{\square}), v, g) = \mu(\{ \forall x \in \mathbb{N} \mid a = g + \text{qischritt}(i) + x * \text{chromschritt} \bullet a \} \cap \text{Durskala}(v))}$$

Bei *perfekten* Intervallen wird bei Fehlen der expliziten Größenangabe *unabhängig* vom Tonvorrat das „reine“ Intervall gewählt :

$$\frac{i \in_A \text{IntervallZahl}, \quad i \notin \text{imperfect}, \quad x \in \mathbb{N}}{\text{nachton}((i, \boxed{\square}), v, g) = g + \text{qischritt}(i, \text{rein})}$$

Durskala : QuintTon \longrightarrow \mathcal{P} (QuintTon)	
Durskala (v)	= $\{v - (1, \text{FnkQuint}) \dots v + (7, \text{FnkQuint})\}$
chromschritt	= $(7, \text{FnkQuint})$
imperfect	$\supset \{ \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{6}, \boxed{7} \}$
$\boxed{n} \in \text{imperfect}$	$\iff \boxed{n+7} \in \text{imperfect}$
qischritt : KlangIntervall \longrightarrow QuintSchritt	
qischritt($\boxed{1}$, rein)	= $(0, \text{FnkQuint})$
qischritt($\boxed{2}$, $\boxed{+}$)	= $(2, \text{FnkQuint})$
qischritt($\boxed{3}$, $\boxed{+}$)	= $(4, \text{FnkQuint})$
qischritt($\boxed{4}$, rein)	= $(-1, \text{FnkQuint})$
qischritt($\boxed{5}$, rein)	= $(1, \text{FnkQuint})$
qischritt($\boxed{6}$, $\boxed{+}$)	= $(3, \text{FnkQuint})$
qischritt($\boxed{7}$, $\boxed{+}$)	= $(5, \text{FnkQuint})$
$\forall i, j, k \in_A \text{KlangIntervall} \mid j \in \text{imperfect}, k \notin \text{imperfect} \bullet$	
qischritt(i, x)	= qischritt($i - 7, x$)
qischritt($i, \boxed{>>}$)	= qischritt($i, \boxed{>}$) + chromschritt
qischritt($i, \boxed{<<}$)	= qischritt($i, \boxed{<}$) - chromschritt
qischritt($j, \boxed{-}$)	= qischritt($j, \boxed{+}$) - chromschritt
qischritt($j, \boxed{>}$)	= qischritt($j, \boxed{+}$) + chromschritt
qischritt($j, \boxed{<}$)	= qischritt($j, \boxed{-}$) - chromschritt
qischritt($k, \boxed{>}$)	= qischritt(k, rein) + chromschritt
qischritt($k, \boxed{<}$)	= qischritt(k, rein) - chromschritt
qischritt($k, \boxed{+}$)	=
qischritt($k, \boxed{-}$)	= Error: „dieses Intervall gippsnisch groß oder klein!“

Tabelle 6: Semantik der reinen und der modifizierten Intervallziffern.

4 Idiosynkrasien \cup Anti-Orthogonalitäten = Klassifikationskriterien ?

Die mit mathematischen Mitteln, also hinreichend exakt, im vorhergenden Kapitel definierten Transformationen erlauben es nun, die verschiedenen historisch entwickelten Systeme daran zu messen und ihre Abweichungen und Besonderheiten durch Verweis auf die entsprechende bestimmte Ableitungsregel zu kokretisieren.

So wäre es möglich, was hier nicht geleistet werden kann, alle Systeme die z.B. [Imi70] informell vergleicht, systematisch nach Gemeinsamkeiten zu gruppieren und nach Anti-Orthogonalität zu messen.

Wir gehen hier umgekehrt vor und kommentieren hier unter der Ziffer n die in den Formeln dem Symbol $\boxed{}$ ausgezeichneten Stelle, die einem derartigen Kriterium entsprechen wird.

 n

1. Diese erste Einschränkung bezieht sich auf das gewählte *semantische* Modell: Es können nur Tonklassen auftreten, die im klassischen System *notierbar* sind, also *feses* bis *his*.

Eigentlich ist die hier gewählte Semantik eine „offene Quintestimmung“ und bedürfte dieser Einschränkung nicht, läßt man sie fort, so können auch Abschweifungen, die wg. der Lage der Bezugstonart nur durch enharmonische Verwechslung *notiert* werden können (ohne wirklich enharmonisch zu *sein!*) ohne eine solche, sondern in einer einzigen, zusammenhängenden Arithmetik dargestellt werden.

Z.zt. ist einfach bei erwähnten Grenztönen „Schluß“, so daß z.B. **Cis-Dur** : TPP (= Fisis-Dur) zwar noch als Klang, aber nicht mehr als Skala (also als lokale Bezugstonart) verwendbar ist.

2. Alle vorhandenen Systeme verwenden die runden Klammern für die Darstellung lokaler scopes oder „erweiterter Funktionen“, also zur Markierung von Bereichen, in denen nicht der Grundton der Grundtonart der Bezugston für die Bedeutung der Symbole ist, sondern der einer benachbarten Funktion¹⁵.

Dabei werden i.A. die bloßen runden Klammern für den Bezug auf die der schließenden Klammer folgende Funktion verwendet, – soll einmal ein *Rückbezug* auf die vorhergehende Funktion angezeigt werden, so schlägt z.B. [dlM76] vor, dies durch einen rückwärts gewandten Pfeil anzudeuten. Dies deutet die praktische Erfahrung an, daß *Vorwärtsbezüge* – jedenfalls in den vorliegenden Analysen – *wesentlich häufiger* zu sein scheinen.

Wir gehen den gegenteiligen Weg, als Klammern nur mit einem vorn oder hinten eingefügten *Doppelpunkt* verwendet werden können, welcher die Richtung des Bezuges angibt. Das Fehlen des Doppelpunktes könnte – wg. o.e. praktischer Erfahrung – dann in einem zweiten Schritt wieder als „syntactic sugar“ für den Doppelpunkt hinten eingeführt werden.

In Übersicht : Vorhandene Schreibweise $(\alpha) \beta$ $\alpha \leftarrow (\beta)$
 Unsere Schreibweise $(\alpha :) \beta$ $\alpha (:\beta)$

3. Einige Autoren wollen mit der Aufeinanderfolge zweier Intervallzahlen *auf selber Schreibhöhe* über dem selben Funktionsbuchstaben evtl. *Stimmführungsbeziehungen* ausdrücken (z.B. [dlM76]). Dann müßten folglich auch Doppelnennungen von Inter-

6 7 7
6 5
vallzahlen möglich sein wie in D $\begin{matrix} 4 & 4 \end{matrix}$.

Die operationale Auswertung einer solchen Sprache wäre höchst kompliziert (wir hatten’s erst vor ...).

Der technischen Komplexität entspricht die historische Unsauberkeit, daß eine solche Festlegung nicht nur das eigentlich fremde Verfahren der Generalbaßbezifferung zitiert, sondern auch gewisse stilistische Regeln des *Tonsatzes* stillschweigend voraussetzt.

In der Folge **D⁶⁵** „geht“ die Sext zur Quinte aufgrund der Satzregeln, wenn nämlich das so bezeichnete Werk der Regel des „kleinsten Schrittes“ folgt. Das funktional-harmonische Symbol als solches sagt das aber *mitnichten* (sondern spricht ja nur über die oktav-abstrahierten *Mengen* der erklingenden Tonklassen),

¹⁵Unser Spielsystem läßt dabei *beliebig tiefe* Schachtelungen zu!

Unsere Implementierung könnte das zZt. auch gar nicht überprüfen, da die *Token-Codierung* die vertikale Position der Zahlen nicht erfasst. Wir bilden also an dieser Stelle des Algorithmus lediglich die Summenmengen aller klingenden Intervalle, und zwar lokal und nicht bezogen auf evtl. Nachbarklänge der gleichen Grundfunktion.

4. In den historischen Modellen ist die Weglassung des Grundtones (= „Verkürzung“) ausschließlich für *Dominantklänge* vorgesehen und wird durch ein spezielles Zeichen (durchgestrichenes D) dargestellt.

Dies kommt psychointerpretativ/historisch daher, daß die Dominantfunktion realisiert durch Sept- oder Nonenakkord in den meisten stilistischen Zusammenhängen dermaßen eindeutig sich vermittelt, daß sie die einzige Funktion war, die häufig angenommen wurde, ohne daß ihr Grundton erklingt.

Unsere Modellierung hingegen erlaubt das Weglassen der Grundtöne aller Funktionen, für welche Schreibweise jedoch Beispiele sinnvoller Anwendung noch zu finden wären.

5. Weiterhin können wir auch das Nicht-Erklingen von Terz und Quinte modellieren, welches u.W. in den „älteren“ Systemen nur von überraschenderweise ERPF ([Erp27]) vorgesehen ist ¹⁶.

Dies erklärt sich wohl daraus, daß – ist einmal die Funktion als solche wirkmächtig – (1) das Erklingen oder Fehlen der Quinte (die ja auch im Teiltonspektrum aller Instrumente vorhanden ist) als vom Hörer spontan „hinzugehört“ als irrelevant erachtet wurde, und daß (2) die Terz, also das Geschlecht des Klanges, aus dem „Tonartgedächtnis“, also dem vorhergehenden Kontext angeblich beibehalten wird.

Zwar ist es durchaus korrekt, daß normalerweise ein einmal etabliertes Geschlecht zu seiner Aufhebung des expliziten Erklingens der je anderen Terz bedarf, jedoch gibt es Beispiele, bei denen das explizite Nicht-Erklingen der etablierten Terz durchaus psychisch bedeutenden Wirkung entfaltet, so zB in MAHLER, Sinf. 2, Satz 1, Takt 126-126, Übergang zum wiederholten Seitensatz : c-moll : t t^{3/} T.

6. Andererseits steht dem die *Idiosynkrasie* entgegen, daß auf der Ebene der Funktionsbuchstaben schon das Geschlecht und damit die Terz bestimmt wird.

Der Anfang von BEETHOVENS Neunter müsste streng genommen mit einem Buchstaben „d“ bezeichnet werden, der groß und klein zugleich ist, entsprechend gleichmassen D3/ und d3/, der Anfang BRUCKNERS Neunter ist t3/ und T3/.

7. Wenn verschiedene Akkorde gleichzeitig klingend den Gesamtklang ausmachen, so kann das z.Zt. gewählte semantische Modell für den Gesamtklang nur *einen(1)* Grundton bezeichnen, weil generell Akkorde als Tonklassenmengen mit *einem* ausgezeichneten Mitglied ausgedrückt werden. Die entspricht nicht unbedingt der psychologischen Realität.

Gegenteiliges gilt für den „Basston“: nur ein Ton darf in der front-end-Eingabe als der tiefste ausgezeichnet werden. Ein Sexakkord, der über einem Orgelpunkt liegt, kann somit sein Umgekehrt-sein nicht mit sich tragen.

¹⁶Wirklich verwunderlich, da das Weglassen eine der wichtigsten harmonischen Maßnahme ist! Der längste Sextvorhalt der Musikgeschichte (u.W.) ist bei VELVET UNDERGROUND, „Sister Ray“, und funk-

tioniert nämlich nur wegen, und ist dennoch eindeutig trotz seiner äußersten Verknappung: $\begin{matrix} 6- & 5 \\ 3/ & 3/ \\ t^{1/} & t^{1/} \end{matrix}$.

8. Dies ist eine NATÜRLICHEFORTSETZUNG : Wenn man i.A. die Buchstaben „D“ und S reihen kann, um mehrfache Quintschritte zu beschreiben, dann kann man in unserer Sprache auch auf einen Terz-Quart-Wechsel einen Quintschritt folgen lassen.

Zweckmäßig scheint dies in erster Linie für Konstruktionen wie C-Dur A-Dur, welche man herkömmlicherweise als T, (D) [Sp] schreiben muss, – bei uns geht einfacher : D, SpD.

9. Diese Regel fängt ab redundante Formulierungen wie $\boxed{S} \boxed{P} \boxed{D}$.

Der Fehler besteht darin, daß das großgeschriebene \boxed{P} nach dem großen \boxed{S} eine Verdurung/Entlehnung bedeutet, die sich im Gesamtklang wegen des folgenden Quint-Ableitungsschrittes gar nicht ausprägt :

$$\boxed{\boxed{S} \boxed{P} \boxed{D}} \implies \boxed{\boxed{S} \boxed{p} \boxed{\uparrow} \boxed{D}} = \boxed{\boxed{S} \boxed{p} \boxed{D}}$$

Es lassen sich aber durchaus *Kontexte* denken, in welchen diese Regel die Ausdrucksmächtigkeit unseres Spielsystems zu weit einschränkt.

Man stelle sich vor eine Akkordfolge in C-Dur, in welcher zunächst C-Dur= \boxed{T} und d-moll= $\boxed{S} \boxed{p}$ Klänge dominieren, und sodann die $\boxed{S} \boxed{p}$ zu D-Dur= $\boxed{S} \boxed{P}$ „verdurt“ wird.

Ist dies noch nicht allzu lange her, dann wird ein auftretender A-Dur-Septakkord wahrscheinlich als Dominante auf den noch im *Klanggedächtnis* (!) gespeicherten D-Dur Klang (rück-)bezogen werden, – dieser Klang trüge also (Dominante-zu-)Dur-Färbung, ohne daß er „rein physikalisch“ den Informationsgehalt (D-)Dur überhaupt mitsichbrächte.

Unser Kalkül versucht auf der Ebene der Buchstabenfolgen halt nur, Klänge „für sich“ zu beschreiben. Zur Bezeichnung o.e. Wahrnehmungseffektes schreiben wir statt des verbotenen $\boxed{S} \boxed{P} \boxed{D}$ einfach $\boxed{[} \boxed{S} \boxed{P} \boxed{]} \boxed{(:} \boxed{D} \boxed{)} !$

10. Alle anzutreffenden Systeme sind sich (ausnahmsweise) einig, daß Alterationen des Grundtones (bis auf sein Nicht-Klingen!) nicht erlaubt sind.

Ein cis-moll Klang kann im C-Dur Kontext vielleicht als TPg gedeutet werden, aber besser nicht als $T^{1<}_{5<}$, welches ja „Tonika-Funktionalität“ für die Tonart C-Dur suggerierte.

Allgemein ist zu *betonen*, daß nicht alle NATÜRLICHEFORTSETZUNGEN, welche das Kalkül als solches nahelegt, auch wirklich eingeführt werden sollen. Die „psychologische“ Semantik des Symbolsystems verlangt ja Nachvollziehbarkeit der mathematischen Ableitung als Erlebnisvorgang, – eine beliebige Darstellbarkeit aller Klänge würde, falls wirklich angewandt, diese Semantik „implodieren“ lassen.

11. Ebenfalls einig sind sich alle Systeme, daß die Größe des Terzintervalles nicht auf der Ebene der *Realisierung* der Funktion bestimmt wird, sondern die Grundfunktion selbst mitbestimmt (s.o. die Diskussion des paradoxen Begriffes der „Dominante in moll“, 2.2).

Ihre Festlegung geschieht also nicht wie die aller anderen Intervalle (selbst der Quinte im Falle ihrer Alteration, wie bei dem bei BEETHOVEN so häufigen „DD5<7“) in der

Ziffernmatrix, welche ja die konkrete klangliche Umsetzung der bereits bestimmten Funktion wiedergibt, sondern auf der tiefer liegenden Ebene der Funktionsbuchstaben.

Auch diejenigen Systeme, die die MALERSche Groß/kleinschreibung nicht verwenden, führen zur Bestimmung der Terzgröße eigene Zeichen ein.

In RIEMANN'S Systemen z.B. bedeutet ein vorangestellter Exponent $^+\chi$ einen Durklang und $^\circ\chi$ einen mollklang.

12. Diese ANTIORTHOGONALITÄT ist ein Strukturindiz, daß die Grenze zwischen Zeichen und „Superzeichen“ nicht hart zu ziehen ist : Die Notation D^7 meint im praktischen Gebrauch in fast allen Fällen einen sog. „Dominant-Septimen-Akkord“, also einen Durakkord mit hinzugefügter *kleiner* Septime. Die Kleinheit des Septimenintervalles geht aber aus dem bloßen kontextfreien Kalkül *nicht* hervor, z.B. bei C-Dur : $SD7$, was einen C-7-Dominanteseptakkord als Zwischendominante zur Subdominanten meint. Eigentlich müssten wir in vielen derartigen Fällen schreiben D^{7-} . Dies aber wäre nicht nur umständlich (wenn auch rein mathematisch korrekt), sondern im konkreten kommunikativen Verkehr wäre es höchst mißverständlich, die undekorierte Zeichenfolge D^7 je nach Kontext auch in einen Groß-Septimklang auswerten zu lassen.

Der letzte Kontext-Parameter (*) unserer Funktion $[[_]]_{\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow}^{\mathcal{I}}$ mußte nur deshalb eingeführt werden, um diesen Fall zu modellieren ! Deshalb bräuchte er auch für die Auswertung von α in unserer Regel nicht weitergegeben zu werden, unter der Voraussetzung, daß $\boxed{7}$ $\boxed{\square}$ maximal einmal im Gesamtterm auftritt, also keimmal in α .

13. Diese ANTIORTHOGONALITÄT ist ein Strukturindiz für tief liegende Differenzen verschiedener Systeme : Welche *Bedeutung* hat eigentlich die Tonart-Bezeichnung zu Beginn einer Symbolzeile?

Verschiedenste Antworten sind anzutreffen, und damit ließen sich die verschiedenen Systeme sogar *skalieren*:

- Sogar die Grundtöne der Funktionen/Stufen werden aus der aktuellen Tonleiter entnommen (Dann wäre C-Dur : SS ein h-vermindert, statt ein B-Dur!)
- Die Entscheidung über die Intervallausprägung (rein, vermindert, groß, klein) für alle Bestandteile eines Klanges außer dem Grundton ergeben sich aus der aktuellen Tonleiter.
- Dto., aber nur für die Klangbestandteile jenseits des Dreiklanges selbst, also Sext- und Quartvorhalte, Septimen, *sixt ajoutée*, Nonen, Sekundvorhalte, etc. (Hier wäre C-Dur : $SS4, SS3$ ein Vorhalte einer *übermäßigen* Quarte vor einem B-Dur-Klang!)
- Nur die Grundtöne werden aus der Tonartbezeichnung entnommen, alles andere ist explizit am Funktionssymbol. (Die SCHENKERSche Theorie, basierend auf seinem Begriff von „Mischung“, also der grundsätzlichen Gleichberechtigung und latenten Ubiquität von Dur *und* moll, ist selbstverständlich nur so formulierbar.)

Ziemlich absurd scheint uns der Vorschlag von DE LA MOTTE [dlm76], der zwar den Begriff „leitereigen“ benutzt, aber tatsächlich den Tonvorrat vom Geschlecht des *folgenden* Symbols ableiten will. So bedeutet bei ihm $D^9 T$ die Hinzufügung der

großen None, D⁹ t jedoch die der kleinen. Die dadurch entstehende Komplizierung des Parsierungsvorganges (das ganze kann nicht mehr lokal ausgewertet werden, sondern der folgende Kontext wird relevant!) ist an sich schon schlimm genug.

Die Kalkülhaftigkeit und Kontextfreiheit ist jedoch mitnichten nur eine technische Anforderung, sondern ihr Fehlen hier ist ein STRUKTURINDIZ für grundlegenden Denkfehler : kleine Nonenakkorde stehen, spätestens seit WAGNER, bestimmt nicht seltener vor Dur- denn vor mollakkorden !

Unabhängig davon kann man unterscheiden:

- (a) *Wann immer* die Ausprägung von Klangbestandteilen explizit gemacht wird, geschieht dies durch Angabe von *Vorzeichen*, welche sich auf das Notat dieser Töne bezieht und deshalb (1) von der Bezugstonart abhängt und (2) nicht transpositionsinvariant ist.
So kann eine „große Sexte“ tonartabhängig durch ein „♯“ oder durch ein „♮“ oder sogar durch ein „b“ dargestellt werden.
Diese Methode ist ein Paradigmen-Mischmasch, da sie die Bezeichnungsweise des *Generalbasses* verwendet. Dort aber sind immer konkrete Tonarten gemeint, — im Kontext *Funktional*-harmonischer Analyse aber. wie der Name schon sagt, transpositionsinvariante Phänomene.
- (b) Die Intervallgrößen werden durch *sepzielle* Symboler gekennzeichnet, die unabhängig von der Bezugstonart „groß“, „klein“, „vermindert“ etc. anzeigen.

5 Erweiterungen, Anpassungen und Einbettungen

Neben seiner Verwendung als Vergleichs-System kann und sollte unser \mathcal{L}_{RIE} in mehrerer Hinsicht weiterentwickelt und in andere Kontexte eingebettet werden:

1. Nach Abschluß der Arbeit, so weit, hat sich herausgestellt, daß die *Trägeralgebra der Semantik* nicht stark genug ist. Der Autor hatte irrigerweise der Wahl dieses Grundmodelles zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt !-(
Um wirklich verwendbar zu sein sollte, statt der „offenen Quintenstimmung“, Verwendung finden
 - (a) ein „offenes EULER-Netz“, welches dann zusammengefaltet wird
 - (b) ein temperiertes System,
 - (c) und ein enharmonisches System.
2. Dringend benötigt werden *Parallele Interpretationen*. (Diese sind aber auch leicht zu implementieren!)
Als front-end Zeichen könnte man sich vorstellen etwas wie

$$\{ \text{xxxx} \mid \text{yyyy} \}$$

... oder ...

$$\begin{array}{c} \text{xxxx} \\ \& \text{yyyy} \end{array}$$

3. Ebenfalls recht einfach ist eine Darstellung des *Klanggedächtnisses*, also das duale zur „Ellipse“. Dies sind Funktionen, die *wegen der Erinnerungsleistung des Hörers* wirksam sind, aber nicht im Notentext stehen. Dazu wäre es nur nötig, im front-end die einzelnen Funktionen (oder eine ganze Unter-Folge) entsprechend auszuzeichnen, z.B. durch

$$\{\{ \text{xxxx} \}\}$$

4. Kompizierter ist die Codierung und Semantische Modellierung der *Rückwärtsgewandten Re-Interpretation*. Hier stoßen nämlich *zwei (2) fast unabhängige Zeit-Dimensionen* aufeinander: Die klingende Zeit, und die Erlebnis-Zeit. Eines der berühmtesten (und zu didaktischen Zwecken bestgeeigneten!) Beispielen ist das „Schicksalsfrage-Motiv“ aus der Walküre:

The image shows a musical staff with a bass clef and a key signature of one flat (B-flat). The melody consists of three notes: a quarter note G2 (one flat), a quarter note A2 (one sharp), and a quarter note B2 (one sharp). The notes are connected by a slur. Below the staff, there are two rows of text. The first row is labeled 'c-moll:' and contains 't', 't³', and '???' under the notes. The second row is labeled 'e-moll:' and contains '6-', '5', and '7' above the notes, and '1/ D₉', '1/ D₉', and 'D₈' below the notes. A blue arrow points from the right towards the first note of the e-moll row.

Der *Startpunkt* des blauen Pfeiles (←) soll dabei andeuten, daß die Interpretation nach e-moll erst *ab* diesem Zeitpunkt wahrgenommen wird, — sein *Endpunkt aber, bis wohin* sich die Re-Interpretation erstreckt.

Für diese zweite, unabhängige Zeit-Dimension muß also eine praktikable Codierung (und Semantik!) gefunden werden. Das ist nun schon um einiges schwieriger.

5. Durch diese Retrospektive Re-Interpretation und die Parallelisierung von Interpretationen lassen sich *überhaupt erst Modulationen* darstellen!
6. Auf der *Darstellungsebene* unseres \mathcal{L}_{RIE} wäre evtl. ein Kalkül-Darstellung sehr hilfreich. Diese könnte Vereinfachungsregeln enthalten wie $\text{XDS} = \text{X}$
 $\text{xPp} = \text{x}$
 $\text{XpP} = \text{X}$
 Für diese sollten dann die entsprechenden *Beweise* aus der Semantik heraus erbracht werden.
7. Überhaupt fehlen (streng genommen) einige Beweise, z.B. die *Vollständigkeit* der Semantik gemessen an der produzierbaren Sprache.
8. Vielleicht aber könnte umgekehrt viele syntaktische Konstruktionen (viel anschaulicher als oben geschehen) durch Rewriting definiert und damit semantisiert werden, z.B. ...

$$\text{XDD} = (\text{D:}) [(\text{D:})\text{X}]$$

Literatur

- [dlM76] MOTTE, DIETHER DE LA: *Harmonielehre*. Kassel, 1976.
- [Erp27] ERPF, HERMANN: *Studien zur Harmonie- und Klangtechnik der neueren Musik*. Leipzig, 1927.
- [Imi70] IMIG, RENATE: *Systeme der Funktionsbezeichnung in den Harmonielehren seit Hugo Riemann*. Nummer9 in *Orpheus*. Gesellschaft zur Förderung der systematischen Musikwissenschaft, Düsseldorf, 1970.
- [Kel59] KELLER, WILHELM: *Handbuch der Tonsatzlehre*. Regensburg, 1959.
- [Lep97] LEPPER, MARKUS: *"lingart"— Projekt zur Modellierung von Domain-Sprachen im Bereich der ästhetischen Produktion*. 1997.
- [Mal31] MALER, WILHELM: *Beitrag zur Harmonielehre*. München, 1931.
- [Rie93] RIEMANN, HUGO: *Vereinfachte Harmonielehre oder die Lehre von den tonalen Funktionen der Akkorde*. London, 1893.
- [Rie18] RIEMANN, HUGO: *Handbuch der Harmonielehre*. Leipzig, 1918.
- [Rum75] RUMMENHÖLLER, PETER: *Eine Bezeichnungsweise tonaler Harmonie, Vorschlag zu ihrer Vereinheitlichung*. *Zeitschrift für Musiktheorie.*, (1):28–47, 1975.
- [Sch14] SCHUMANN, ROBERT: *Gesammelte Schriften über Musik und Musiker*. Leipzig, 1914.
- [Sch57] SCHOENBERG, ARNOLD: *Die Formbildenden Tendenzen der Harmonie*. Mainz, 1957.
- [vO66] OETTINGEN, ARTHUR VON: *Harmoniesystem in dualer Entwicklung*. Dorpat und Leipzig, 1866.